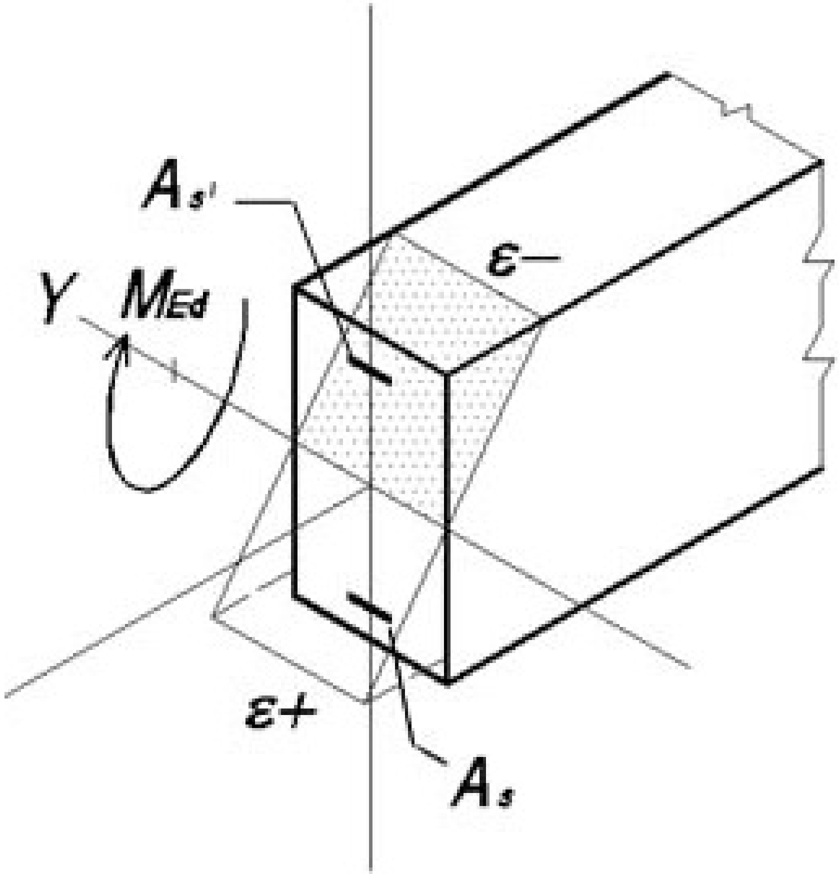
Sussidi didattici per il corso di
COSTRUZIONI EDILI

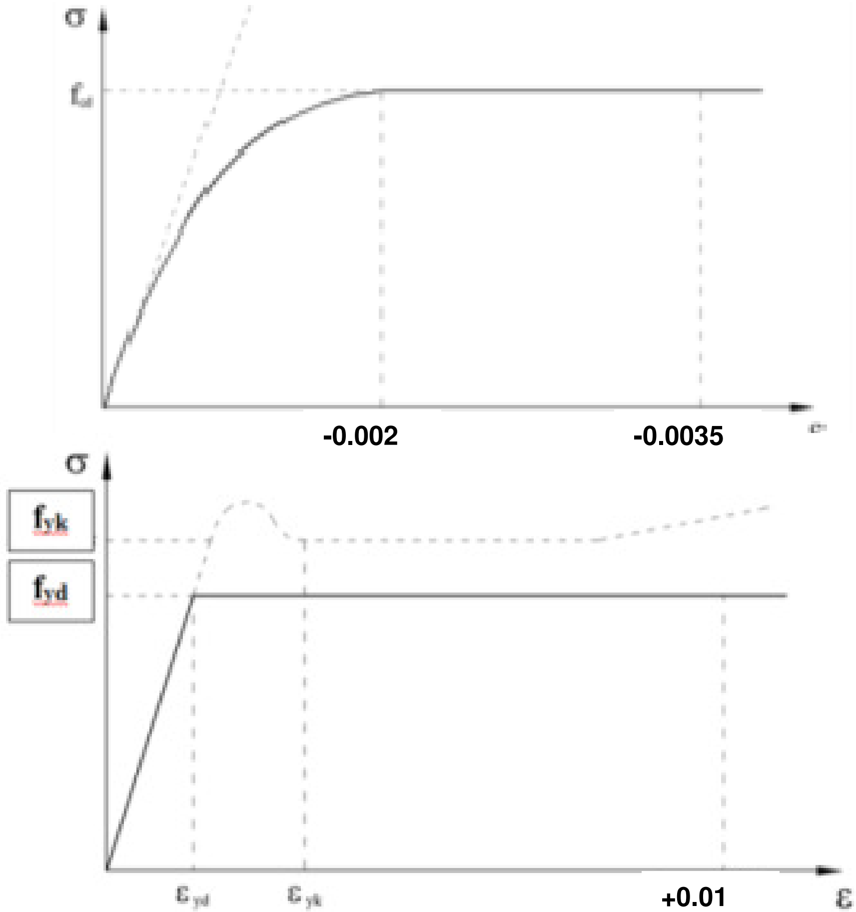
Prof. Ing. Francesco Zanghì

STRUTTURE IN CEMENTO ARMATO - II

AGGIORNAMENTO 26/09/2012

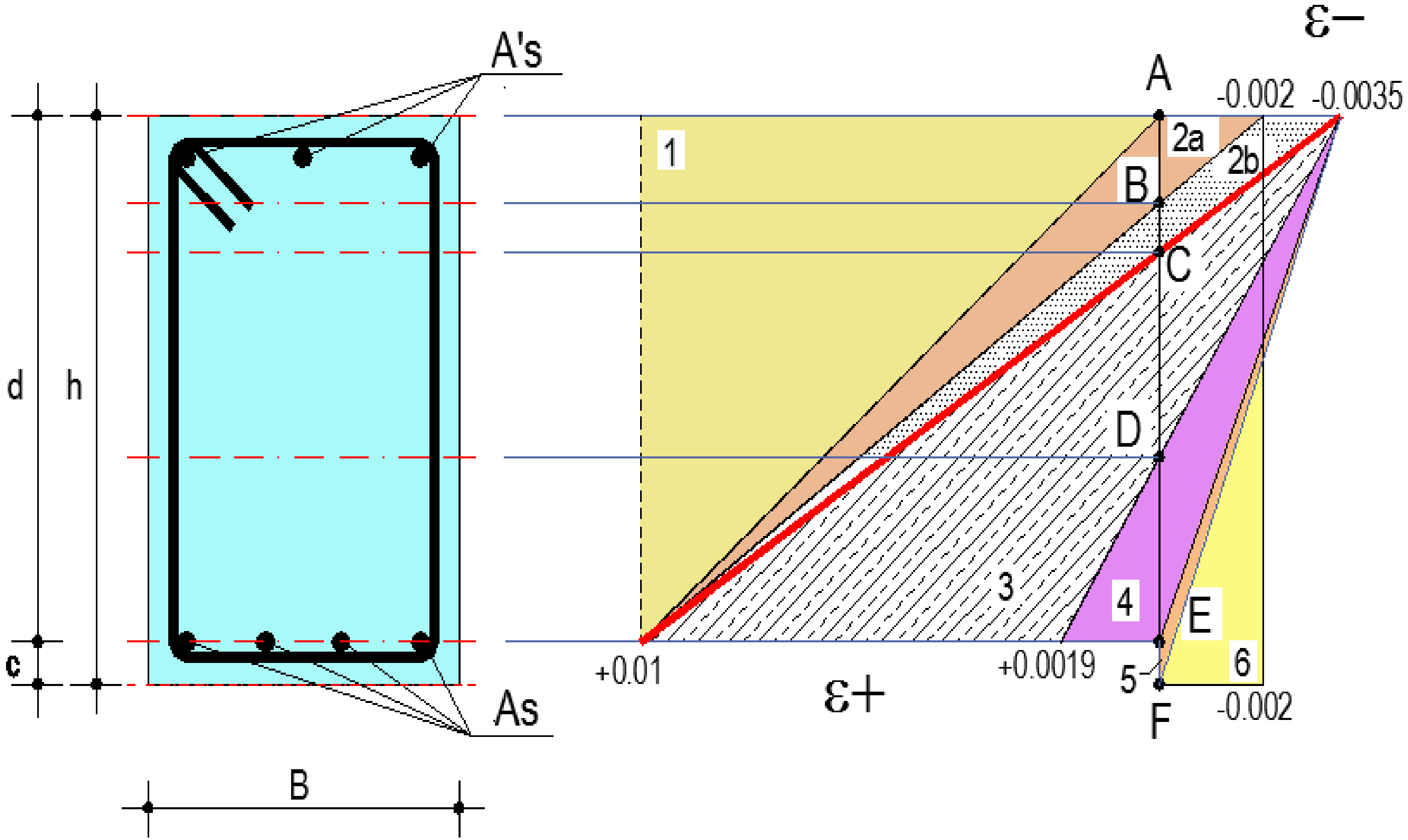
STATI LIMITE ULTIMI CON N E M





Il limite di resistenza della sezione si determina quando uno dei due materiali ha raggiunto la sua deformazione ultima.

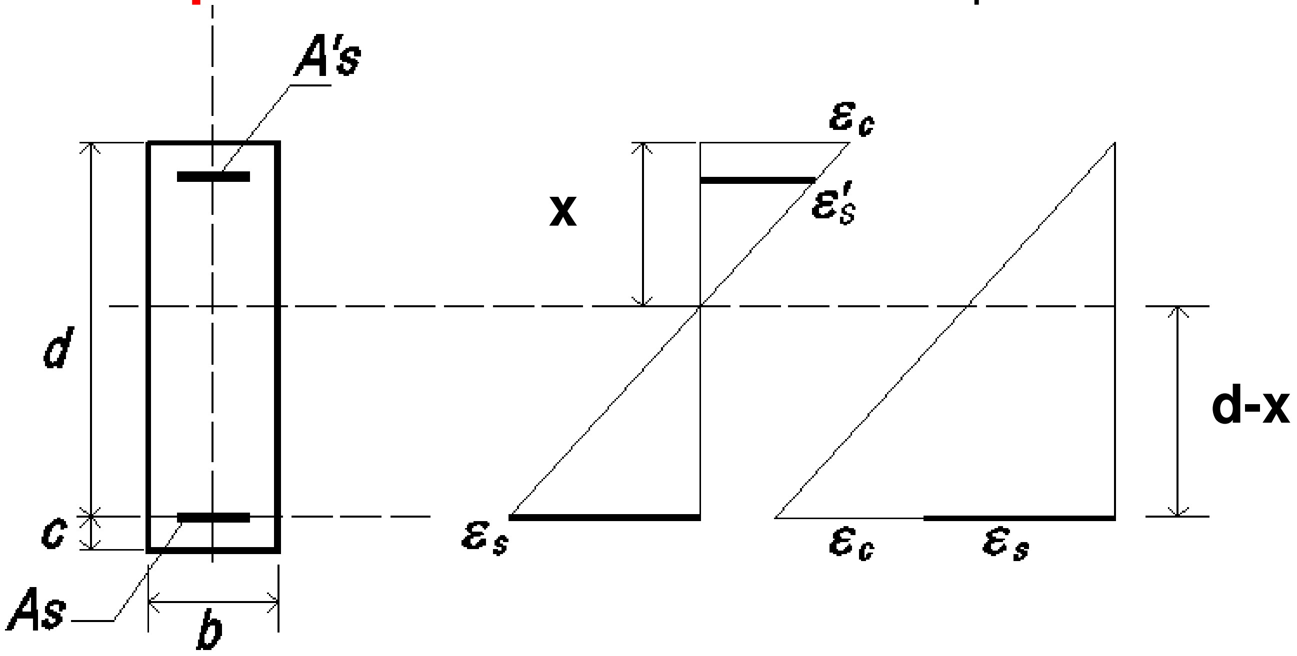
Possono aversi diversi scenari o (campi) di rottura dove le lettere maiuscole individuano le possibili posizioni dell'asse neutro.



- ✓ **Campo 1** – **Tenso-flessione** (trazione con debole eccentricità)
- ✓ **Campo 2** – massimo allungamento dell'acciaio e calcestruzzo non completamente sfruttato; la rottura della sezione avviene per raggiungimento della deformazione ultima nell'acciaio con il calcestruzzo che presenta una residua capacità di deformarsi – **sezione ad armatura debole**.
- ✓ **Campo 3** – **ROTTURA PERFETTA o BILANCIATA:** massimo accorciamento del calcestruzzo con acciaio in campo plastico – **sezione ad armatura normale**.
- ✓ **Campo 4** – massimo accorciamento del calcestruzzo con acciaio in campo elastico; la rottura della sezione avviene per schiacciamento del cls mentre l'acciaio presenta una residua capacità di deformarsi – **sezione ad armatura forte**.
- ✓ **Campo 5** – **Flessione composta.**
- ✓ **Campo 6** – **Pressoflessione con piccola eccentricità.**

CAMPO		k
1	**Tenso-flessione**	da **-∞** a **0**
2a	**sezione ad armatura debole**	da **0** a **0.167**
2b		da **0.167** a **0.259**
3	**ROTTURA PERFETTA** **sezioni ad armatura normale**	da **0.259** a **0.642**
4	**ROTTURA FRAGILE** **sezioni ad armatura forte**	da **0.642** a **1**
5	**Flessione composta**	da **1** a **h/d**
6	**Pressoflessione con piccola eccentricità**	da **h/d** a **+∞**

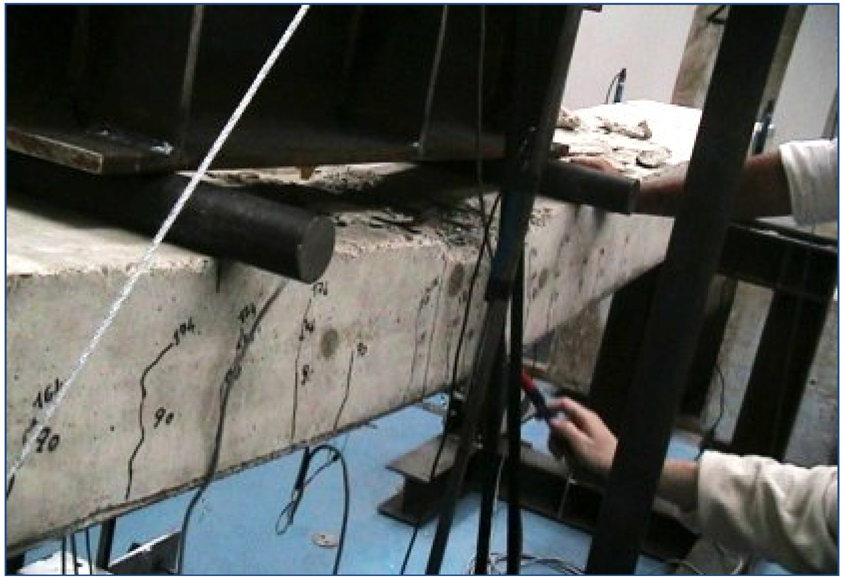
La soluzione ideale è quella in cui la rottura della sezione avviene quando entrambi i materiali hanno raggiunto il loro limite deformativo ed è individuata dalla retta che passa per C – **sezione bilanciata**.
Quindi la modalità di rottura di una sezione è descritta dalla posizione "**x**" che assume l'asse neutro rispetto alla altezza utile "**d**" della sezione. Tale rapporto adimensionale (x/d) prende il nome di **profondità relativa** della zona compressa.



Ponendo la similitudine dei triangoli si può scrivere:

$$x \div (d - x) = \varepsilon_c \div \varepsilon_s \quad \text{da cui} \quad \frac{x}{d} = k = \frac{\varepsilon_c}{(\varepsilon_c + \varepsilon_s)}$$

L'Eurocodice 2, per i calcestruzzi con resistenza ordinaria, impone **k≤0.45** allo scopo di avere una rottura sufficientemente **duttile** e con armatura snervata. In sostanza la DUTTILITA' rappresenta la capacità della sezione di deformarsi *plasticamente*. Se una sezione è duttile, prima della rottura è in grado di ruotare sensibilmente. In pratica una sezione che presenti rottura duttile dà chiari segnali di preavviso (elevata fessurazione, notevole incremento della deformazione) che possono mettere in allarme e consentire interventi prima del crollo.



Esempio di rottura in campo 2

Le sezione inflesse ben proporzionate appartengono, solitamente, ai campi 2b e 3. In questo caso il comportamento è **duttile** e i due materiali sono sfruttati al massimo. E' buona norma evitare le sezioni in campo 4 in quanto hanno un comportamento di tipo **fragile**.

PRESCRIZIONI DI NORMATIVA

1. L'armatura longitudinale tesa deve essere almeno: $\boxed{A_s \geq 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \geq 0.0013 \cdot b \cdot d}$

   b = *larghezza della zona tesa;* d = *altezza utile della sezione*

   $f_{ctm} = 0.30 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2}$ *resistenza media a trazione* del calcestruzzo

2. $A_{s,max} \leq 0.04\ A_c$ Armatura tesa (o compressa) considerata individualmente
3. All'intradosso degli appoggi di estremità deve essere disposta un'armatura metallica calcolata

   per uno sforzo di trazione uguale al taglio: $A_{s,\min} = \frac{V_{\max}}{f_{yd}}$

4. Minimo 3 staffe/m con **A_{st}≥1.5b**. L'interasse delle staffe deve essere comunque **i≤0.8d**. Le staffe devono assorbire almeno il 50% degli sforzi di taglio.

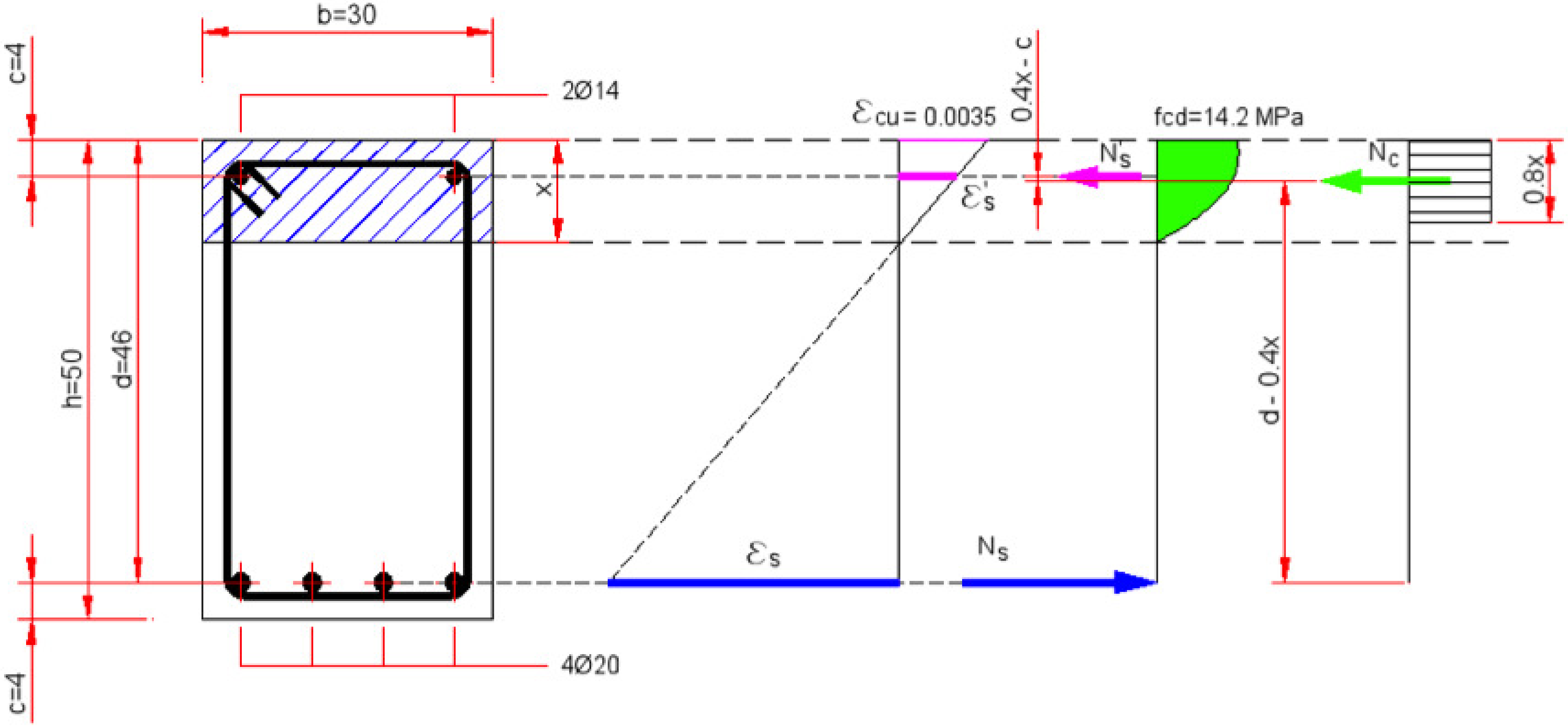
FLESSIONE SEMPLICE RETTA

Anche se è presente sforzo normale, è possibile semplificare la procedura di verifica e considerare la sezione come **solo inflessa** se:

$$\boxed{N_{sd} \leq 0.08 \cdot f_{ck} \cdot A_c}$$

ESEMPIO N°1

Verificare *a flessione una trave in c.a. di sezione rettangolare 30x50, realizzata con calcestruzzo di classe C25/30 e armature metalliche del tipo B450C, sollecitata da un momento flettente di progetto pari a 160 kNm. La trave è armata inferiormente con 4Φ20 e superiormente con 2Φ14.*



Caratteristiche dei materiali:

- Calcestruzzo C25/30

Resistenza di progetto a compressione: $f_{cd} = 0.85 \dfrac{f_{ck}}{1.50} = 0.85 \dfrac{25}{1.50} = 14.11\ MPa$

Resistenza media a trazione: $f_{ctm} = 0.30 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0.30 \cdot \sqrt[3]{25^2} = 2.55\ MPa$

Deformazione ultima: $\varepsilon_{cu} = 0.0035$

Modulo elastico: $E_c = 31447\ MPa$

- Acciaio B450C

Tensione di progetto allo snervamento: $f_{yd} = \dfrac{f_{yk}}{1.15} = \dfrac{450}{1.15} = 391.3\ MPa$

Deformazione allo snervamento: $\varepsilon_{yd} = \dfrac{f_{yd}}{E_s} = \dfrac{391.3}{206000} = 0.0019$

Deformazione ultima: $\varepsilon_{su} = 0.01$

Modulo elastico: $E_s = 206000\ MPa$

Armature:

Armatura tesa: $A_s = 12.56\ cm^2\ (4\Phi 20)$; Armatura compressa: $A'_s = 3.08\ cm^2\ (2\Phi 14)$

Posizione dell'asse neutro:

- *Risultante delle tensioni nell'armatura tesa* (che si suppone snervata: $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} = 0.0019$):

$$N_s = f_{yd} \cdot A_s = 39.13 \cdot 12.56 = 491.5\ kN$$

- *Risultante delle tensioni nell'armatura compressa* (che si suppone snervata: $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} = 0.0019$):

$$N'_s = f_{yd} \cdot A'_s = 39.13 \cdot 3.08 = 120.5\ kN$$

- *Risultante delle tensioni di compressione nel calcestruzzo*:

  In condizioni di rottura il diagramma delle tensioni nel calcestruzzo (compresso) assume l'andamento coerente con il legame costitutivo (parabola-rettangolo) utilizzato per questo materiale. Per le sezioni di forma comune, non si commette un grosso errore se si sostituisce il diagramma parabolico con uno rettangolare (**stress-block**) equivalente di larghezza pari sempre a f_{cd} e altezza pari a 0.8x, dove x è la profondità della zona compressa individuata dalla posizione dell'asse neutro.

$$N_c = f_{cd} \cdot b \cdot (0.8 \cdot x) = 14.11 \cdot 30 \cdot (0.8 \cdot x) = 34 \cdot x\ kN$$

Per l'equilibrio alla traslazione orizzontale della sezione:

$$N_s - N'_s - N_c = 0; \quad 491.5 - 120.5 - 34 \cdot x = 0; \quad x = \frac{370.65}{34} = 10.90\,cm$$

Se esprimiamo la stessa equazione di equilibrio inserendo le espressioni letterali dei tre contributi avremo:

$$f_{yd} \cdot A_s - f_{yd} \cdot A'_s - f_{cd} \cdot b \cdot (0.8x) = 0$$

Da cui si ricava:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) \cdot f_{yd}}{0.8 \cdot f_{cd} \cdot b}$$

Occorre controllare che l'armatura compressa sia effettivamente snervata. Calcoliamo la profondità minima affinché l'armatura compressa sia snervata.
Con riferimento al diagramma delle deformazioni, dalla similitudine dei triangoli si ricava:

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon'_s} = \frac{x}{x-c}; \quad \varepsilon'_s = \varepsilon_{cu}\frac{x-c}{x}$$

imponendo l'uguaglianza con la deformazione al limite di snervamento si ottiene:

$$\varepsilon_{cu}\frac{x-c}{x} = \varepsilon_{yd}; \quad x = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}-\varepsilon_{yd}}c = \frac{0.0035}{0.0035-0.0019}c \approx \boxed{2.20 \cdot c} = 2.20 \cdot 4 = 8.80\,cm$$

poiché: $x = 10.90\,cm > 8.80\,cm$ la posizione dell'asse neutro trovata è corretta.

$$k = \frac{x}{d} = \frac{10.90}{46} = 0.236$$

la rottura avviene nel campo 2b.

Calcolo del momento resistente:

Per l'equilibrio alla rotazione, ad esempio, rispetto al punto di applicazione di N_c:

$$M_{rd} = N_s (d - 0.4x) + N'_s (0.4x - c) = 491.5(46 - 0.4 \cdot 10.9) + 120.5(0.4 \cdot 10.9 - 4) =$$
$$= 20590\ kNcm = 206\ kNm > M_{sd} = 160\ kNm$$

VERIFICA POSITIVA

Se esprimiamo la stessa equazione di equilibrio inserendo le espressioni letterali avremo:

$$M_{rd} = f_{yd} \cdot A_s \cdot (d - 0.4x) + f_{yd} \cdot A'_s \cdot (0.4x - c)$$

Da cui si ricava:

$$M_{rd} = f_{yd} \cdot [A_s \cdot (d - 0.4x) + A'_s \cdot (0.4x - c)]$$

ESEMPIO N°2

Con i dati dell'esempio precedente ***Verificare*** *a flessione la trave disponendo anche superiormente con 4Φ20.*

Armature:

Armatura tesa: $A_s = 12.56\,cm^2\,(4\Phi 20)$; Armatura compressa: $A'_s = 12.56\,cm^2\,(4\Phi 20)$

Posizione dell'asse neutro:

Ipotizziamo che l'armatura compressa sia snervata:

$$x = \frac{(A_s - A'_s)\cdot f_{yd}}{0.8\cdot f_{cd}\cdot b} = \frac{(12.56 - 12.56)\cdot 39.13}{0.8\cdot 1.41\cdot 30} = 0$$

poiché:

$$x = 0 < 2.20\cdot c = 8.80\,cm$$

l'armatura compressa non è snervata pertanto la posizione dell'asse neutro dovrà essere trovata mediante risoluzione di un'equazione di secondo grado:

$$x = \left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}}A'_s\right)\cdot\frac{f_{yd}}{2\cdot 0.8\cdot b\cdot f_{cd}} + \sqrt{\left(A_s - \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}}A'_s\right)^2\left(\frac{f_{yd}}{2\cdot 0.8\cdot b\cdot f_{cd}}\right)^2 + \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}}\frac{A'_s\cdot c\cdot f_{yd}}{0.8\cdot b\cdot f_{cd}}}$$

nel nostro caso la relazione fornisce:

$$x = \left(12.56 - \frac{0.0035}{0.0019}12.56\right)\cdot\frac{39.13}{2\cdot 0.8\cdot 30\cdot 1.41} + \sqrt{\left(12.56 - \frac{0.0035}{0.0019}12.56\right)^2\left(\frac{39.13}{2\cdot 0.8\cdot 30\cdot 1.41}\right)^2 + \frac{0.0035}{0.0019}\frac{12.56\cdot 4\cdot 39.13}{0.8\cdot 30\cdot 1.41}} \approx 6.00\,cm$$

la tensione nell'armatura compressa vale:

$$\sigma'_s = \frac{x-c}{x}\frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} = \frac{(6-4)}{6}\frac{0.0035}{0.0019}39.13 = 24\,\frac{kN}{cm^2} = 240\ MPa < f_{yd}$$

Calcolo del momento resistente:

$$M_{rd} = f_{yd}\cdot\left[A_s\cdot(d-0.4x) + A'_s\cdot(0.4x-c)\right] =$$

$$39.13\cdot\left[12.56\cdot(46-0.4\cdot 6.00) + 12.56\cdot(0.4\cdot 6.00 - 4)\right] = 20604\ kNcm$$

$$\approx 206\ kNm > M_{sd} = 160\,kNm$$

VERIFICA POSITIVA

$$k = \frac{x}{d} = \frac{6}{46} = 0.130$$

la rottura avviene nel campo **2a**.

Tabella tondini da Cemento Armato

Diametro mm	Numero barre										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
	sezione [cm²]										
6	0,28	0,57	0,85	1,13	1,41	1,70	1,98	2,26	2,54	2,83	3,39
8	0,50	1,01	1,51	2,01	2,51	3,02	3,52	4,02	4,52	5,03	6,03
10	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28	7,07	7,85	9,42
12	1,13	2,26	3,39	4,52	5,65	6,79	7,92	9,05	10,18	11,31	13,57
14	1,54	3,08	4,62	6,16	7,70	9,24	10,78	12,32	13,85	15,39	18,47
16	2,01	4,02	6,03	8,04	10,05	12,06	14,07	16,08	18,10	20,11	24,13
18	2,54	5,09	7,63	10,18	12,72	15,27	17,81	20,36	22,90	25,45	30,54
20	3,14	6,28	9,42	12,57	15,71	18,85	21,99	25,13	28,27	31,42	37,70
22	3,80	7,60	11,40	15,21	19,01	22,81	26,61	30,41	34,21	38,01	45,62
24	4,52	9,05	13,57	18,10	22,62	27,14	31,67	36,19	40,72	45,24	54,29
25	4,91	9,82	14,73	19,63	24,54	29,45	34,36	39,27	44,18	49,09	58,90
26	5,31	10,62	15,93	21,24	26,55	31,86	37,17	42,47	47,78	53,09	63,71
28	6,16	12,32	18,47	24,63	30,79	36,95	43,10	49,26	55,42	61,58	73,89
30	7,07	14,14	21,21	28,27	35,34	42,41	49,48	56,55	63,62	70,69	84,82
32	8,04	16,08	21,13	32,17	40,21	48,25	56,30	64,34	72,38	80,42	96,51

Fonti

- **D. M. Infrastrutture Trasporti 14 gennaio 2008** (G.U. 4 febbraio 2008 n. 29 - Suppl. Ord.)
  Norme tecniche per le Costruzioni"
- **Circolare 2 febbraio 2009 n. 617 del Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti** (G.U. 26 febbraio 2009 n. 27 – Suppl. Ord.)
  "Istruzioni per l'applicazione delle 'Norme Tecniche delle Costruzioni' di cui al D.M. 14 gennaio 2008".
- S.Catasta – Materiale didattico
- Università degli Studi Roma Tre – facoltà di Ingegneria: materiale didattico