

**Sussidi didattici per il corso di
COSTRUZIONI EDILI**

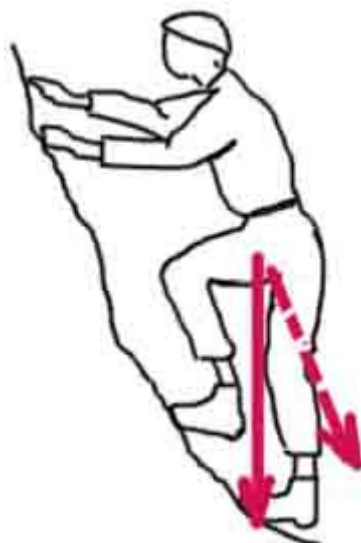
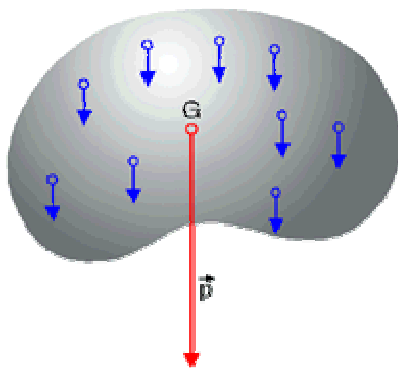
Prof. Ing. Francesco Zanghì

GEOMETRIA DELLE AREE

AGGIORNAMENTO DEL 29/09/2011

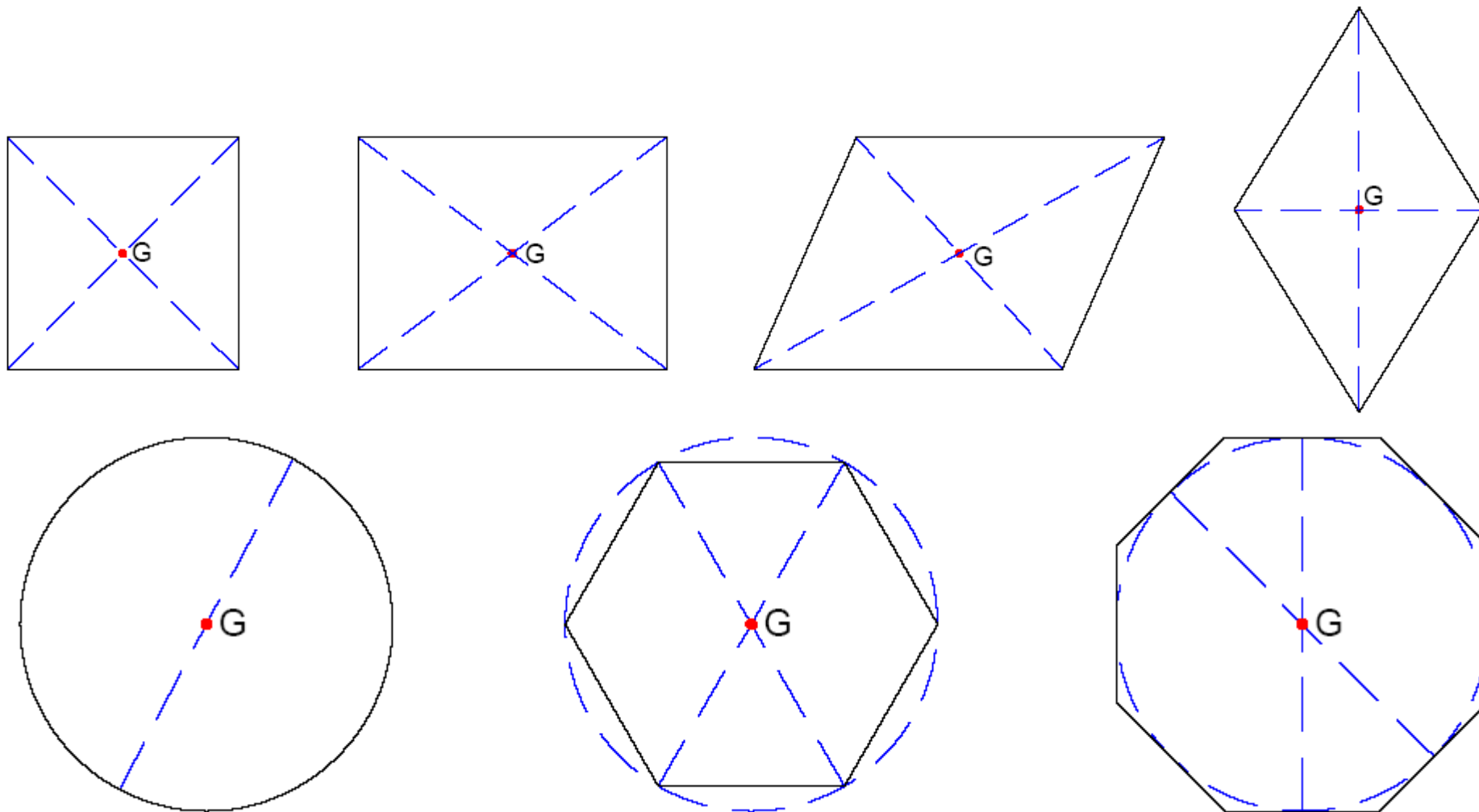
Baricentro

In un sistema di punti materiali o nel caso di un solido può essere definito un punto rappresentativo di tutto il sistema. Tale punto, lo dice la parola stessa baricentro, è il punto di un sistema (continuo e formato da tanti punti materiali) in cui si può immaginare concentrata l'intera massa.



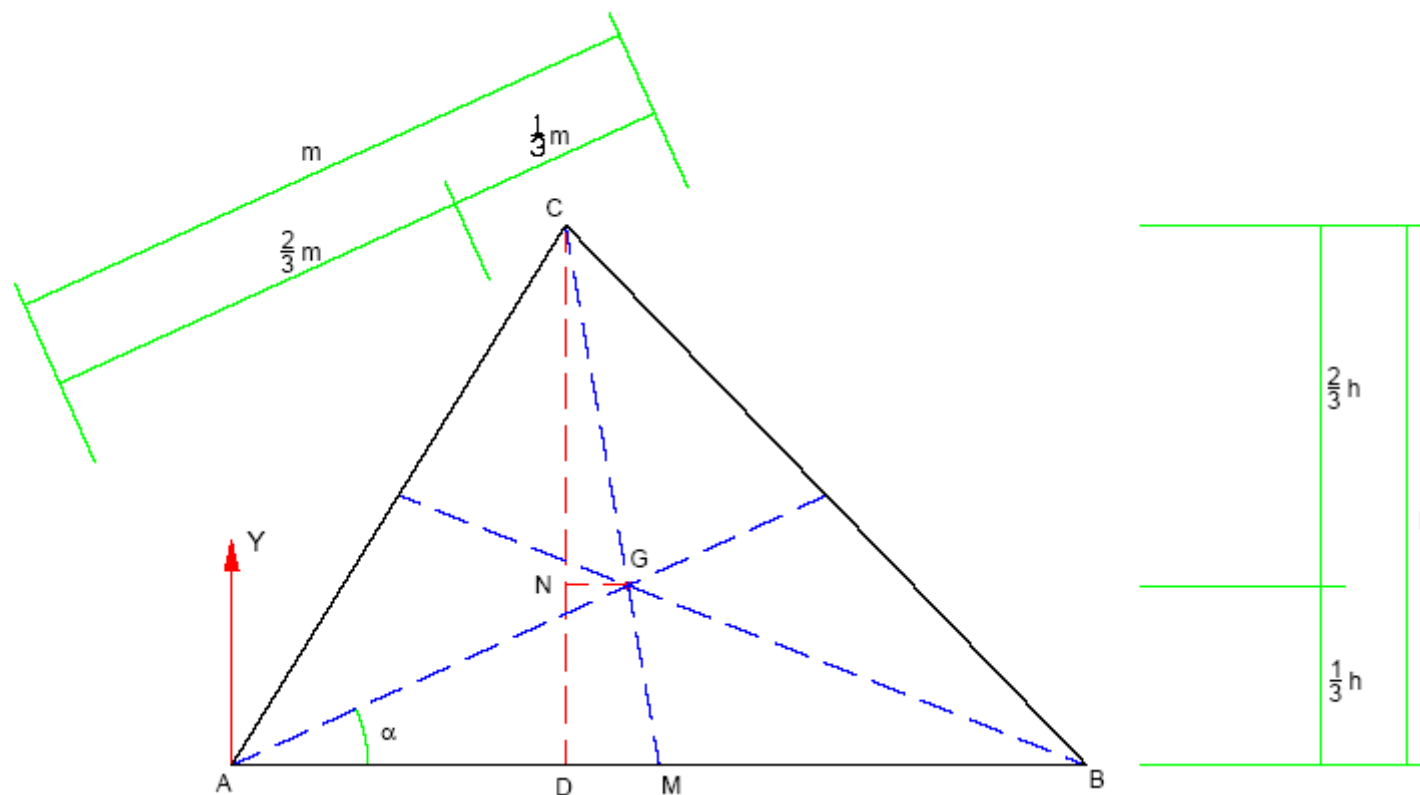
- 1) Se la figura ammette un asse di simmetria il baricentro appartiene all'asse**
- 2) Se la figura ammette due assi di simmetria il baricentro è l'intersezione di tali assi**

BARICENTRO DI FIGURE REGOLARI

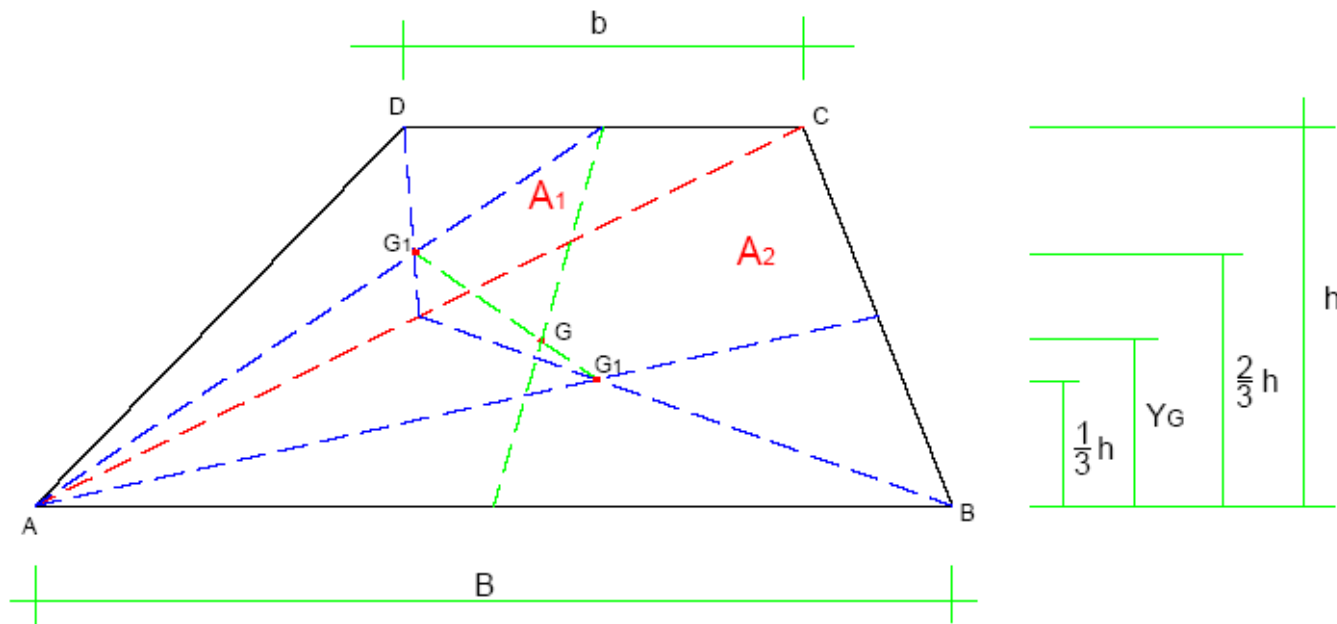


TRIANGOLO

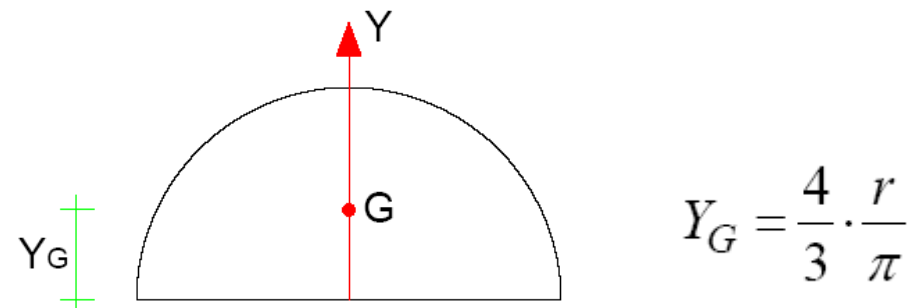
Il baricentro di un triangolo si determina graficamente attraverso l'intersezione di due mediane.

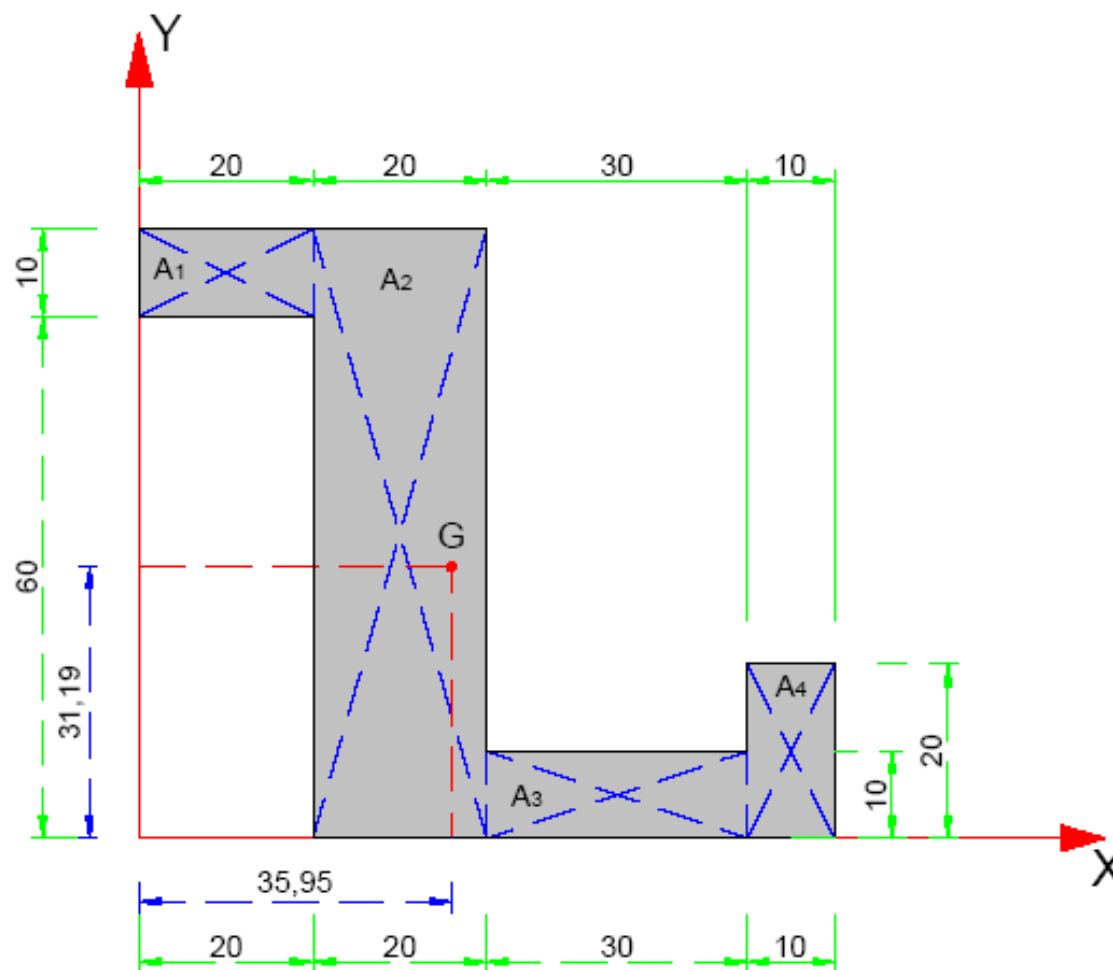


TRAPEZIO



SEMICERCHIO



BARICENTRO DI FIGURE COMPOSTE – ESEMPIO N°1

Si scompone la figura in un insieme di figure semplici di caratteristiche geometriche note.

$$A_1 = 20 \cdot 10 = 200cm^2 \quad X_1 = \frac{20}{2} = 10cm \quad Y_1 = 60 + \frac{10}{2} = 65cm$$

$$A_2 = 20 \cdot 70 = 1400cm^2 \quad X_2 = 20 + \frac{20}{2} = 30cm \quad Y_2 = \frac{70}{2} = 35cm$$

$$A_3 = 30 \cdot 10 = 300cm^2 \quad X_3 = 20 + 20 + \frac{30}{2} = 55cm \quad Y_2 = \frac{10}{2} = 5cm$$

$$A_4 = 10 \cdot 20 = 200cm^2 \quad X_4 = 20 + 20 + 30 + \frac{10}{2} = 75cm \quad Y_2 = \frac{20}{2} = 10cm$$

$$A_t = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 200 + 1400 + 300 + 200 = 2100cm^2$$

MOMENTO STATICO RISPETTO ALL'ASSE X:

$$S_X = \sum A_i \cdot Y_i = A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2 + A_3 \cdot Y_3 + A_4 \cdot Y_4$$

$$S_X = 200 \cdot 65 + 1400 \cdot 35 + 300 \cdot 5 + 200 \cdot 10 = 65500cm^3$$

MOMENTO STATICO RISPETTO ALL'ASSE Y:

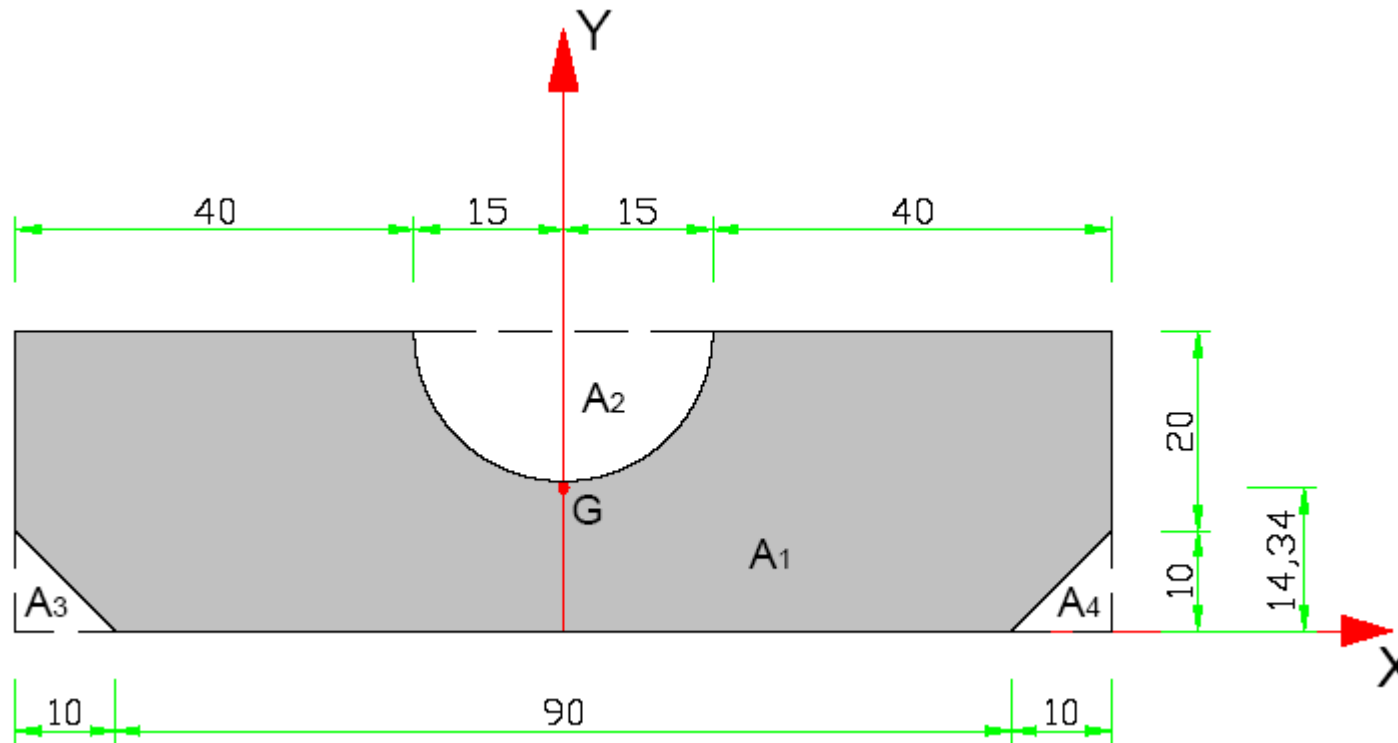
$$S_Y = \quad = \sum A_i \cdot X_i = (A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + A_3 \cdot X_3 + A_4 \cdot X_4)$$

$$S_Y = (200 \cdot 10 + 1400 \cdot 30 + 300 \cdot 55 + 200 \cdot 75) = 75500cm^3$$

COORDINATE DEL BARICENTRO:

$$X_G = \frac{S_Y}{A_t} = \frac{75500}{2100} = 35,95cm$$

$$Y_G = \frac{S_X}{A_t} = \frac{65500}{2100} = 31,19cm$$

BARICENTRO DI FIGURE COMPOSTE – ESEMPIO N°2

$$A_1 = 110 \cdot 30 = 3300 \text{ cm}^2$$

$$Y_1 = 15 \text{ cm}$$

$$A_2 = -\frac{\pi \cdot 15^2}{2} = -353,43 \text{ cm}^2$$

$$Y_2 = 30 - \frac{4 \cdot 15}{3 \cdot \pi} = 23,63 \text{ cm}$$

$$A_3 = -\frac{10 \cdot 10}{2} = -50 \text{ cm}^2$$

$$Y_3 = \frac{10}{3} = 3,33 \text{ cm}$$

$$A_4 = -\frac{10 \cdot 10}{2} = -50 \text{ cm}^2$$

$$Y_4 = \frac{10}{3} = 3,33 \text{ cm}$$

$$A_t = \sum A_i = 3300 - 353,43 - 50 - 50 = 2846,57 \text{ cm}^2$$

MOMENTO STATICO RISPETTO ALL'ASSE X:

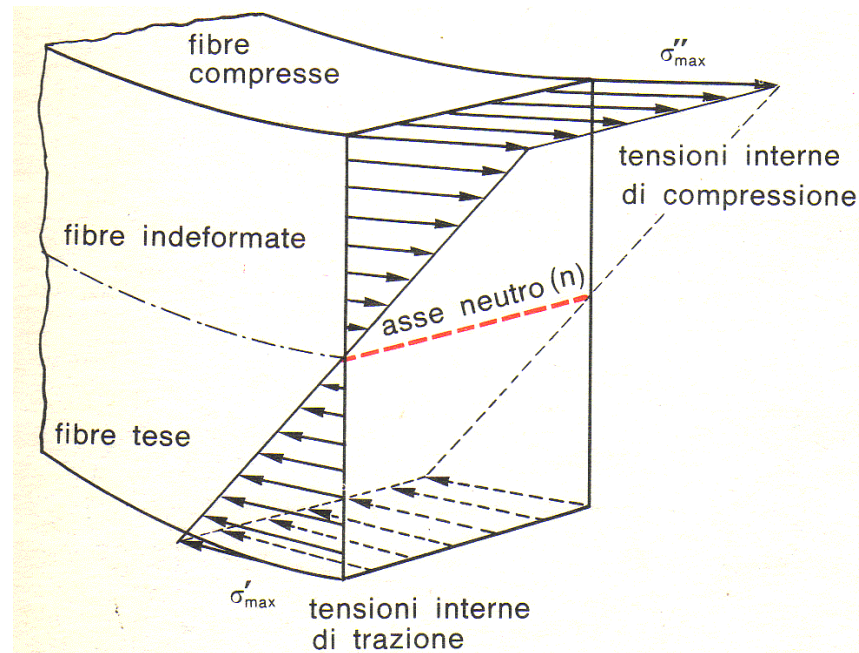
$$S_X = \sum A_i \cdot Y_i = 3300 \cdot 15 - 353,43 \cdot 23,63 - 50 \cdot 3,33 - 50 \cdot 3,33 = 40815,45 \text{ cm}^3$$

ORDINATA DEL BARICENTRO:

$$Y_G = \frac{S_X}{A_t} = \frac{40815,45}{2846,57} = 14,34 \text{ cm}$$

Momento d'inerzia

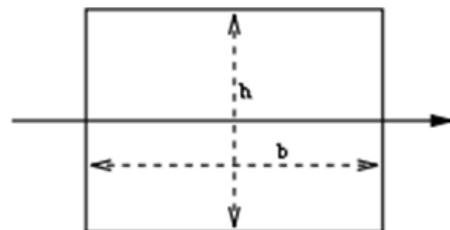
Il **momento di inerzia** è una misura della resistenza di un corpo a mutare la sua velocità rotazionale cioè è una misura dell'attitudine del corpo ad **opporsi** al movimento rotatorio attorno ad un asse.



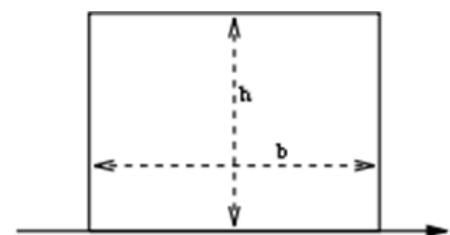
Il momento di inerzia delle figure piane rispetto a un asse è direttamente correlato alla resistenza della sezione di un elemento soggetto a flessione. E' una grandezza che indica l'attitudine di una figura piana a ruotare rispetto ad un asse di riferimento, **maggiore è il momento d'inerzia, minore è l'attitudine a ruotare che mostrerà la sezione.**

RETTANGOLO

$$J_{11} = \frac{bh^3}{12}$$

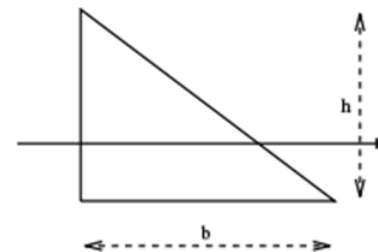


$$J_{11} = \frac{bh^3}{3}$$

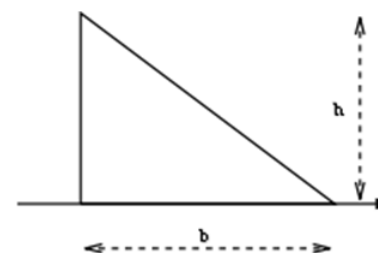


TRIANGOLO

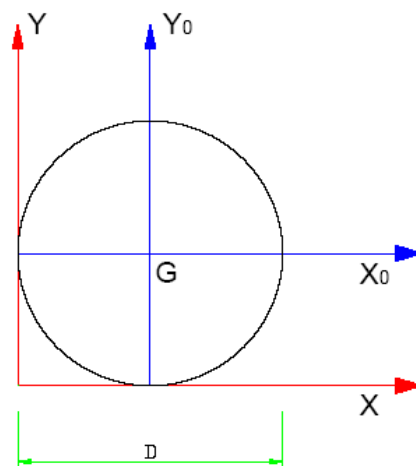
$$J_{11} = \frac{bh^3}{36}$$



$$J_{11} = \frac{bh^3}{12}$$



CERCHIO

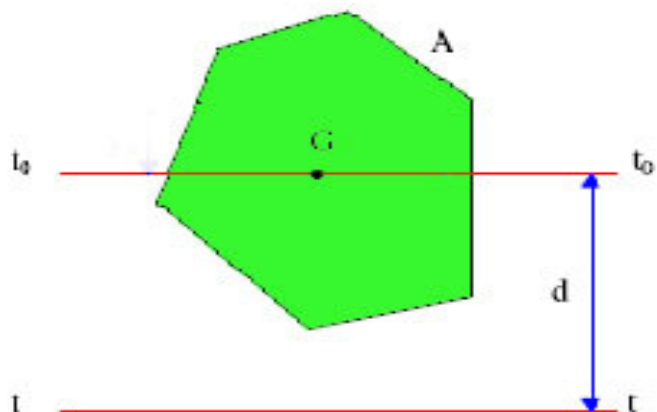


$$J_X = J_Y = \frac{5}{64} \cdot \pi \cdot D^4$$

$$J_{X0} = J_{Y0} = \frac{1}{64} \cdot \pi \cdot D^4$$

TEOREMA DI TRASPOSIZIONE

Il momento d'inerzia rispetto ad un asse t si ottiene sommando al momento d'inerzia rispetto all'asse t_0 baricentrico e parallelo a t , il prodotto dell'area (A) della superficie per il quadrato della distanza (d^2) fra le rette t e t_0



$$J_t = J_{t_0} + A \cdot d^2$$

momento d'inerzia baricentrico $j = \frac{a \times b^3}{12}$

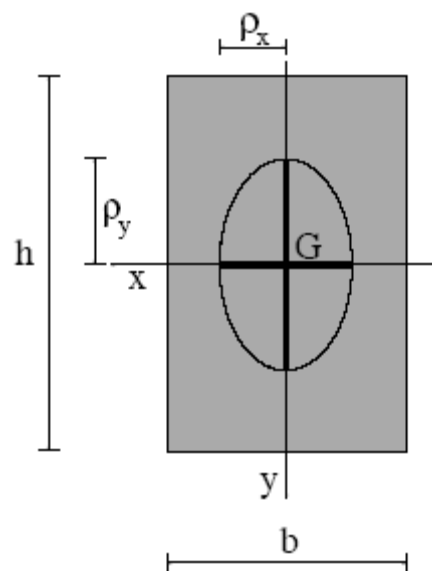
momento d'inerzia rispetto l'asse $m - m$ $J_m = \frac{a \times b^3}{12} + (a \times b) \times d^2$

RAGGIO D'INERZIA ed ELLISSE D'INERZIA

E' la distanza dalla retta fino ad un punto in cui si dovrebbe concentrare tutta l'area della figura per ottenere lo stesso valore del momento d'inerzia.

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{A}}$$

Immaginando di calcolare i momenti d'inerzia rispetto a tutti gli infiniti assi baricentrici di una sezione, le estremità degli altrettanti raggi d'inerzia che otterremmo, individuano sempre un'**ellisse** (o un cerchio quando gli assi principali d'inerzia sono uguali).



Tracciare l'ellisse centrale d'inerzia è utile per **esprimere visivamente la capacità inerziale della sezione stessa.**

MOMENTI D'INERZIA CENTRIFUGO

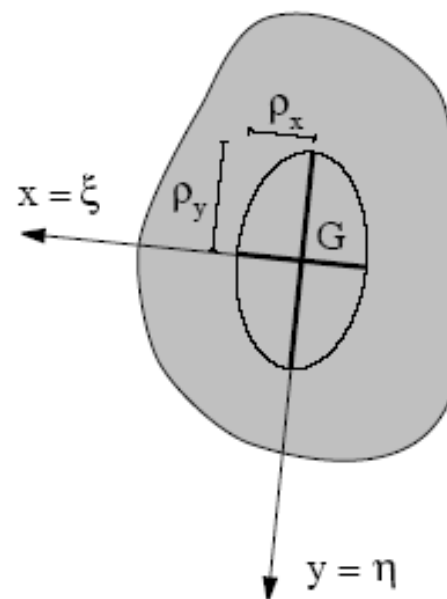
$$J_{XY} = A \cdot x_g \cdot y_g$$

MOMENTI D'INERZIA PRINCIPALI

In particolare esistono due momenti d'inerzia rispetto agli infiniti assi baricentrici che godono della proprietà di essere uno il **massimo** e l'altro il **minimo**; tali momenti d'inerzia sono detti principali e gli assi ad essi corrispondenti sono **assi principali d'inerzia**, i quali hanno la caratteristica di essere baricentrici ed ortogonali tra loro.

$$J_{\xi} = \frac{J_{X0} + J_{Y0}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_{X0} - J_{Y0})^2 + 4 \cdot J_{X0Y0}^2}$$

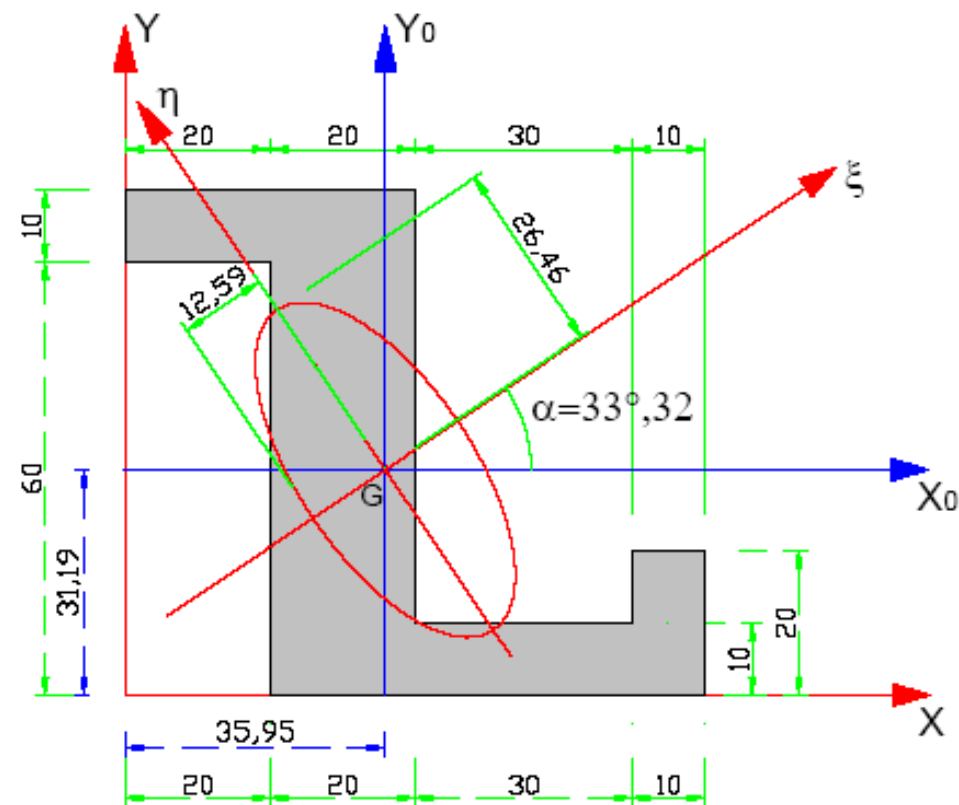
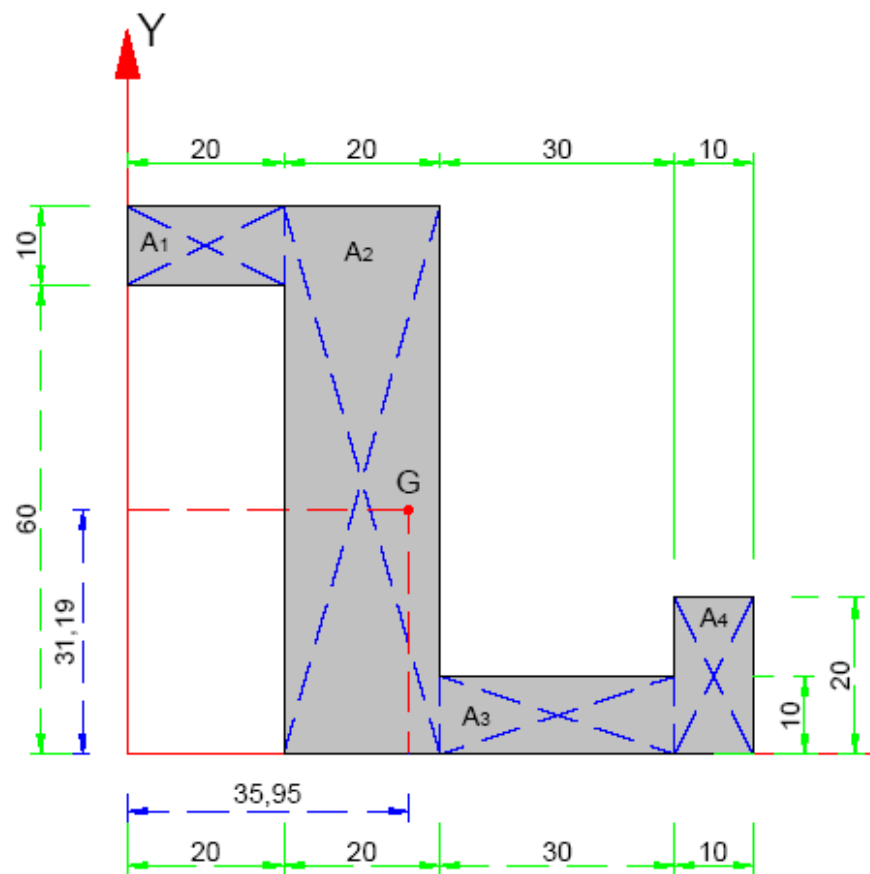
$$J_{\eta} = \frac{J_{X0} + J_{Y0}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_{X0} - J_{Y0})^2 + 4 \cdot J_{X0Y0}^2}$$



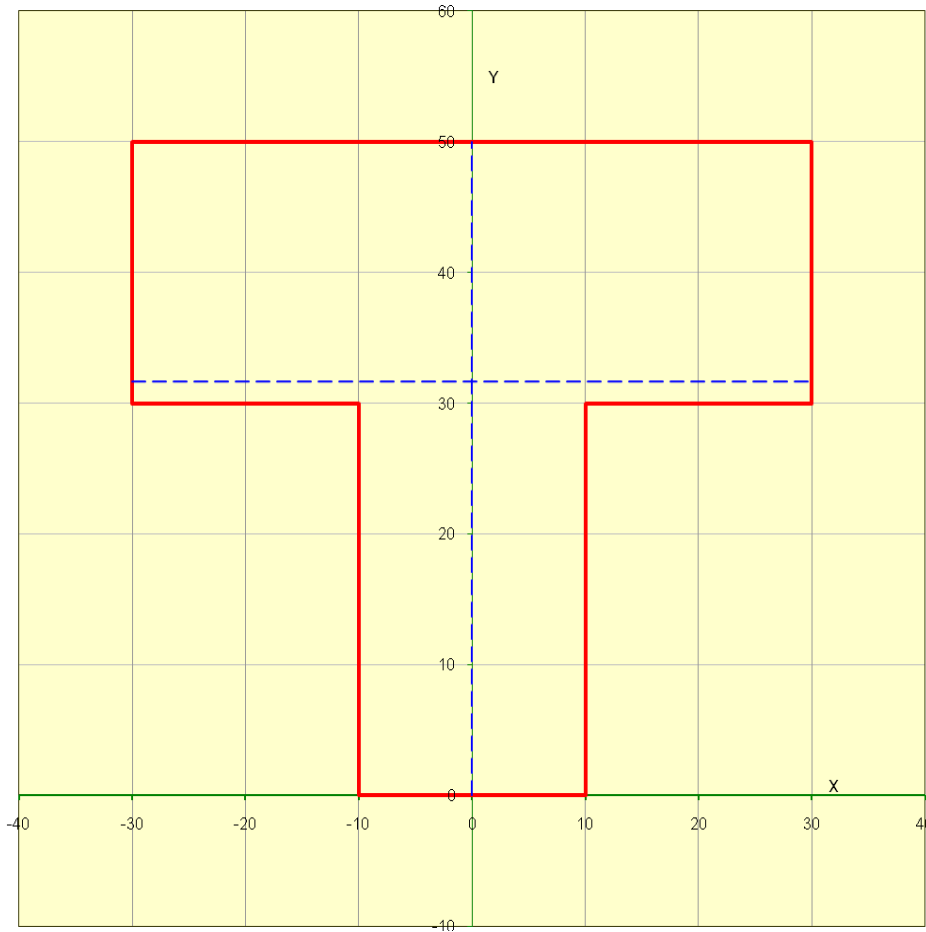
L'orientamento degli assi principali è dato da:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cdot J_{X0Y0}}{J_{X0} - J_{Y0}} \right)$$

ESERCIZIO



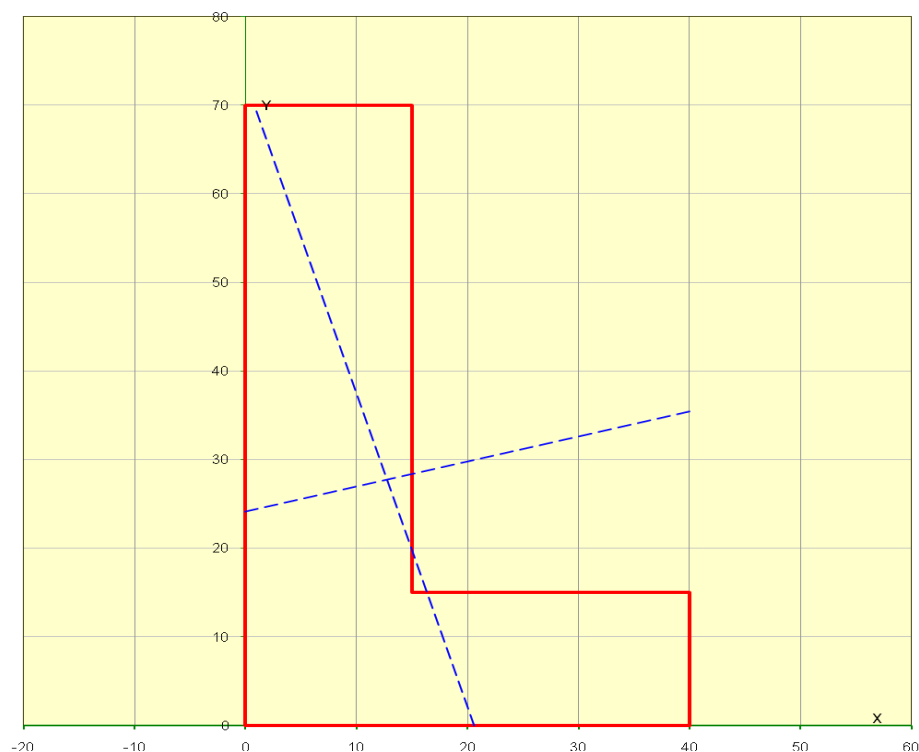
ESEMPI RISOLTI MEDIANTE FOGLIO ELETTRONICO



Coordinate dei nodi		
	x	y
1	0.000	0.000
2	-10.000	0.000
3	-10.000	30.000
4	-30.000	30.000
5	-30.000	50.000
6	30.000	50.000
7	30.000	30.000
8	10.000	30.000
9	10.000	0.000
10	0.000	0.000
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		

Asse baricentriche			
A =	1800 cm ²	L =	60 cm
P =	220.00 cm	H =	50 cm
x _c =	0.00 cm	W _x ^{sup} =	18272.73 cm ³
y _c =	31.67 cm	W _x ^{inf} =	10578.95 cm ³
I _x =	3.35E+05 cm ⁴	W _y ^{dx} =	12666.67 cm ³
I _y =	3.80E+05 cm ⁴	W _y ^{sx} =	12666.67 cm ³
I _{xy} =	0.00E+00 cm ⁴		
Direzioni principali			
θ ₀ =	0.00E+00 deg	W _{xp} ^{sup} =	18272.73 cm ³
I _{x0} =	3.35E+05 cm ⁴	W _{xp} ^{inf} =	10578.95 cm ³
I _{y0} =	3.80E+05 cm ⁴	W _{yp} ^{dx} =	12666.67 cm ³
I _p =	7.15E+05 cm ⁴	W _{yp} ^{sx} =	12666.67 cm ³

Riferimento utente			
x _o =	0.000 cm	θ _o =	0.000 deg
y _o =	0.000 cm		
x _{co} =	0.00 cm		
y _{co} =	31.67 cm		
I _{x0} =	2.14E+06 cm ⁴		
I _{y0} =	3.80E+05 cm ⁴		
S _{x0} =	57000 cm ³		
S _{y0} =	0 cm ³		

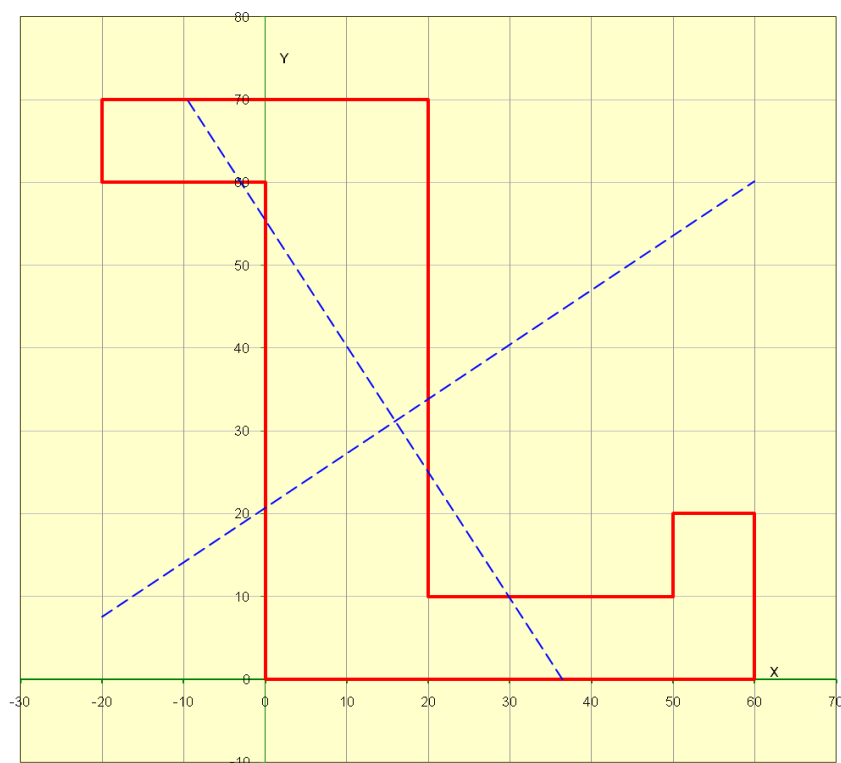


Coordinate dei nodi		
	x	y
1	0.000	0.000
2	0.000	70.000
3	15.000	70.000
4	15.000	15.000
5	40.000	15.000
6	40.000	0.000
7	0.000	0.000
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		

Asi baricentrici	
A = 1425 cm ²	L = 40 cm
P = 220.00 cm	H = 70 cm
x _c = 12.76 cm	W _x ^{sup} = 15264.99 cm ³
y _c = 27.76 cm	W _x ^{inf} = 23223.05 cm ³
I _x = 6.45E+05 cm ⁴	W _y ^{dx} = 11732.6 cm ³
I _y = 1.50E+05 cm ⁴	W _y ^{sx} = 5497.886 cm ³
I _{xy} = -1.52E+05 cm ⁴	

Direzioni principali	
θ _p = 1.58E+01 deg	W _{xp} ^{sup} = 15588.03 cm ³
I _{xp} = 6.88E+05 cm ⁴	W _{xp} ^{inf} = 20153.35 cm ³
I _{yp} = 1.07E+05 cm ⁴	W _{yp} ^{dx} = 5386.188 cm ³
I _p = 7.94E+05 cm ⁴	W _{yp} ^{sx} = 4696.829 cm ³

Riferimento utente	
x _o = 0.000 cm	θ _o = 0.000 deg
y _o = 0.000 cm	
x _{co} = 12.76 cm	
y _{co} = 27.76 cm	
I _{xo} = 1.74E+06 cm ⁴	
I _{yo} = 3.82E+05 cm ⁴	
S _{xo} = 39563 cm ³	
S _{yo} = 18188 cm ³	



Coordinate dei nodi		
	x	y
1	0.000	0.000
2	0.000	60.000
3	-20.000	60.000
4	-20.000	70.000
5	20.000	70.000
6	20.000	10.000
7	50.000	10.000
8	50.000	20.000
9	60.000	20.000
10	60.000	0.000
11	0.000	0.000
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		

Assi baricentrici			
A =	2100 cm ²	L =	80 cm
P =	320.00 cm	H =	70 cm
x _c =	15.95 cm	W _x ^{sup} =	29039.88 cm ³
y _c =	31.19 cm	W _x ^{inf} =	36133.59 cm ³
I _x =	1.13E+06 cm ⁴	W _y ^{dx} =	18791.39 cm ³
I _y =	6.76E+05 cm ⁴	W _y ^{sx} =	15337.84 cm ³
I _{xy} =	-5.22E+05 cm ⁴		

Direzioni principali			
θ _d =	3.33E+01 deg	W _{xp} ^{sup} =	28179.67 cm ³
I _{xp} =	1.47E+06 cm ⁴	W _{xp} ^{inf} =	29256.55 cm ³
I _{yp} =	3.32E+05 cm ⁴	W _{yp} ^{dx} =	10906.98 cm ³
I _p =	1.80E+06 cm ⁴	W _{yp} ^{sx} =	10835.78 cm ³

Riferimento utente			
x _o =	0.000 cm	θ _o =	0.000 deg
y _o =	0.000 cm		
x _{co} =	15.95 cm		
y _{co} =	31.19 cm		
I _{xo} =	3.17E+06 cm ⁴		
I _{yo} =	1.21E+06 cm ⁴		
S _{xo} =	65500 cm ³		
S _{yo} =	33500 cm ³		

Fonti

- R. Lapiello – appunti di Costruzioni - Geometria delle masse -
- C.Mjorana – L.Sgarbossa, Didattica di Disegno e Progettazione delle Costruzioni
- G. Alfano - Appunti di Scienza delle Costruzioni