Sussidi didattici per il corso di
COSTRUZIONI EDILI

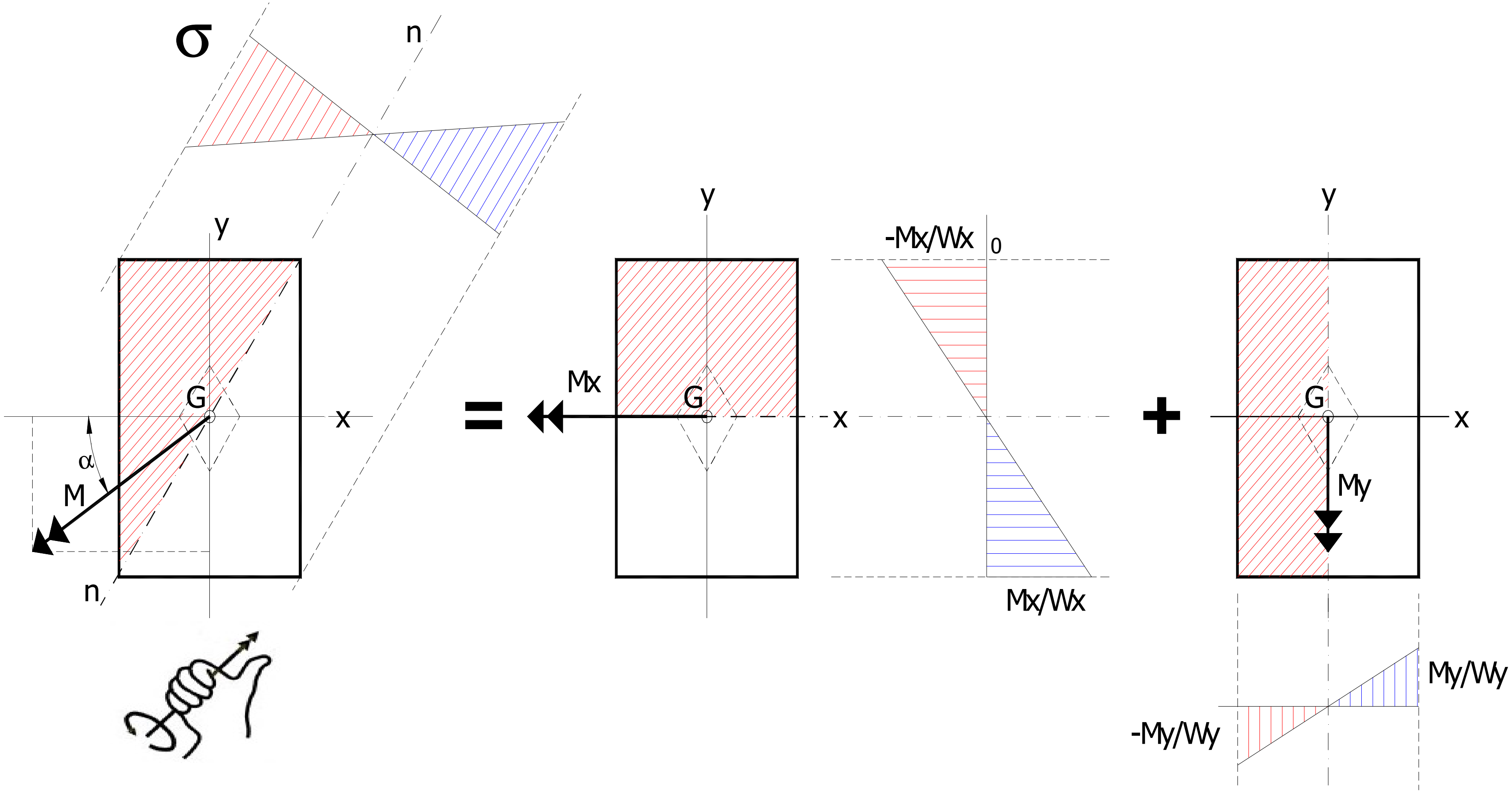
Prof. Ing. Francesco Zanghì

SOLLECITAZIONI COMPOSTE

AGGIORNAMENTO 28/10/2011

FLESSIONE DEVIATA

Si ha **flessione deviata** quando il piano di sollecitazione, pur contenendo l'asse della trave, non contiene uno degli assi centrali d'inerzia della sezioni. In altri termini l'asse momento non coincide con uno degli assi principali d'inerzia.



Essa si può considerare composta da <u>due flessioni rette</u> le quali invece hanno asse momento coincidente con degli assi centrali d'inerzia.

La **formula di Navier** assume la seguente formula binomia:

$$\boxed{\sigma = \frac{M_x\, y}{J_x} + \frac{M_y\, x}{J_y}}$$

M_x sarà POSITIVO se genera trazione dalla parte delle ordinate positive
M_y sarà POSITIVO se genera trazione dalla parte delle ascisse positive

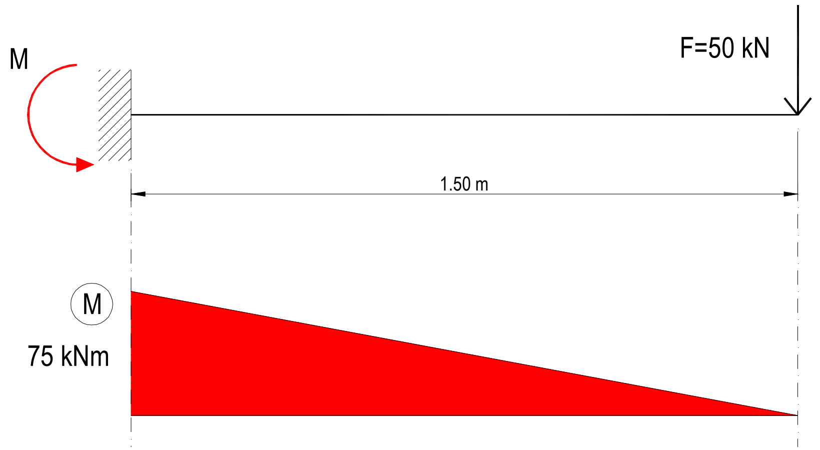
L'**equazione dell'asse neutro**, nel sistema di riferimento fissato per la sezione, si ricava osservando che esso, per definizione, è il luogo dei punti che hanno tensione nulla:

$$\sigma = \frac{M_x\, y}{J_x} + \frac{M_y\, x}{J_y} = 0 \quad \text{da cui} \quad \frac{M_x\, y}{J_x} = -\frac{M_y\, x}{J_y} \quad \text{cioè} \quad \boxed{y = -\frac{M_y}{M_x}\frac{J_x}{J_y}x}$$

N.B. L'asse neutro si può trovare anche sfruttando le proprietà dell'ellisse d'inerzia della sezione. Infatti l'asse di sollecitazione e l'asse neutro sono **coniugati.**

ESEMPIO N°1

*Determinare la distribuzione delle tensioni normali sulla sezione di incastro di una mensola a sezione rettangolare (20x35), di luce l=1.5 m, sottoposta ad un carico **F=50 kN** inclinato di 30° rispetto alla direzione verticale.*



Il momento massimo nella sezione di incastro è: $M = F \cdot l = 50 \cdot 1.50 = 75\ kNm$

Calcoliamo le sue componenti rispetto agli assi x e y:

$M_x = M \cos 30° = 64.95\ kNm$ *POSITIVO: genera trazione dalla parte delle y positive*

$M_y = M \sin 30° = 37.50\ kNm$ *POSITIVO: genera trazione dalla parte delle x positive*

Calcoliamo i momenti di inerzia rispetto agli assi baricentrici x e y:

$$J_x = \frac{0.20 \cdot 0.35^3}{12} = 7.14 \cdot 10^{-4}\ m^4 \ ; \ J_y = \frac{0.35 \cdot 0.20^3}{12} = 2.33 \cdot 10^{-4}\ m^4$$

Troviamo l'equazione dell'asse neutro imponendo:

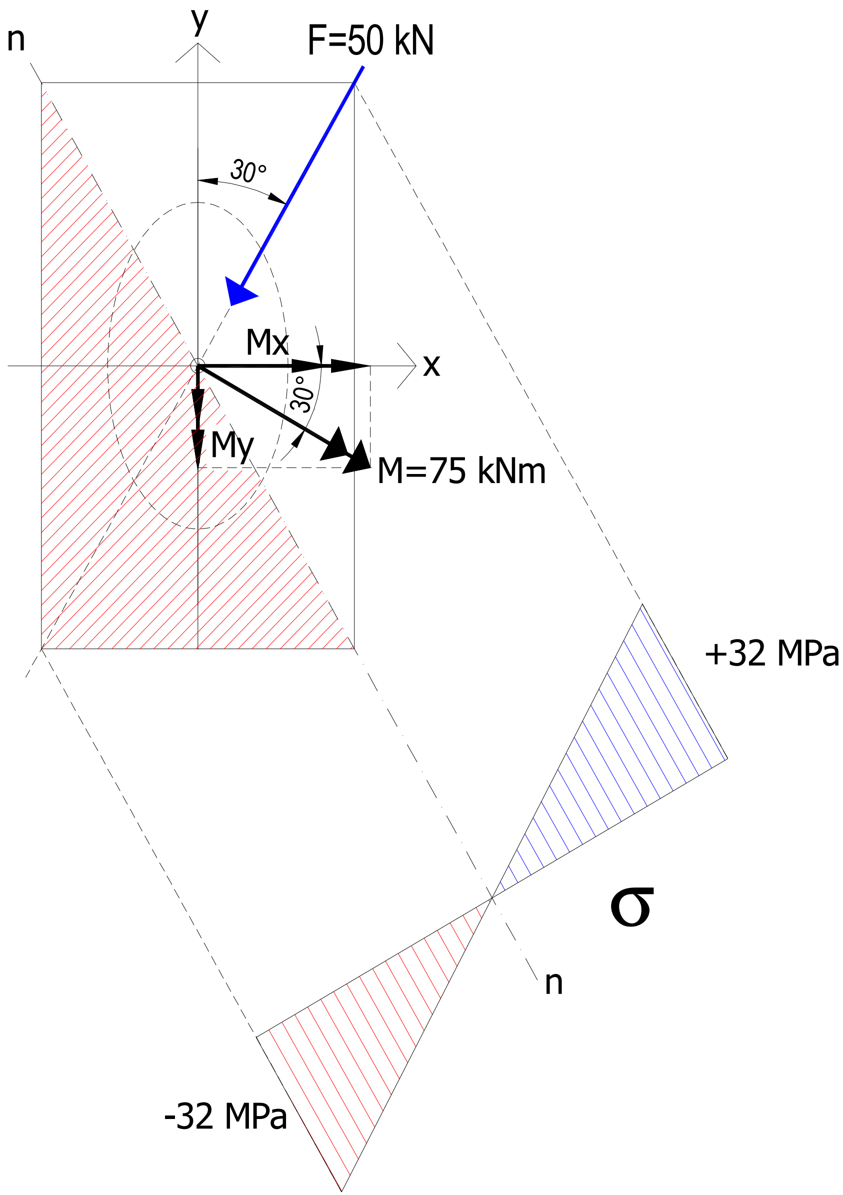
$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_x} = \frac{64.95}{7.14 \cdot 10^{-4}} y + \frac{37.50}{2.33 \cdot 10^{-4}} x = 0 \, ;$$

$$y = -\frac{37.50}{2.33 \cdot 10^{-4}} \frac{7.14 \cdot 10^{-4}}{64.95} x \, ; \quad y = -1.77 \, x$$

Il valore della massima tensione si ha nello spigolo della sezione di coordinate x=10 e y=17.5:

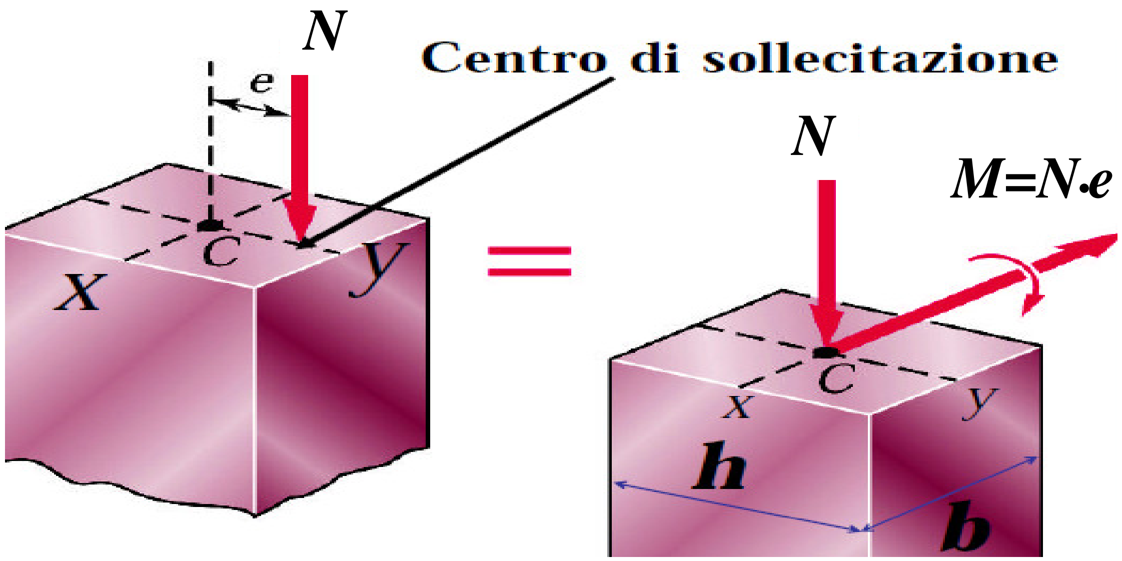
$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_x} = \frac{64.95}{7.14 \cdot 10^{-4}} \cdot 0.175 + \frac{37.50}{2.33 \cdot 10^{-4}} \cdot 0.1 =$$

$$= 32013.53 \frac{kN}{m^2} = 32 \, MPa$$



PRESSO-TENSO FLESSIONE SEMPLICE

(AZIONE COMBINATA di FLESSIONE RETTA + SFORZO NORMALE)



TENSO-FLESSIONE

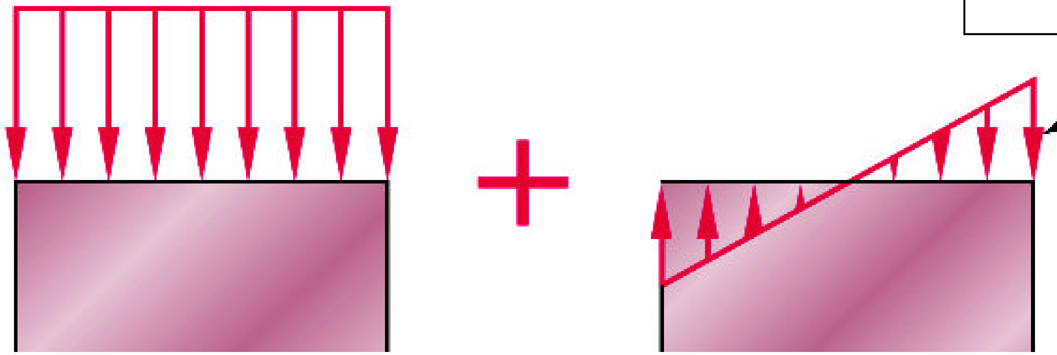
$$\sigma = + \frac{N}{A} \pm \frac{N \cdot e}{J_x} y$$

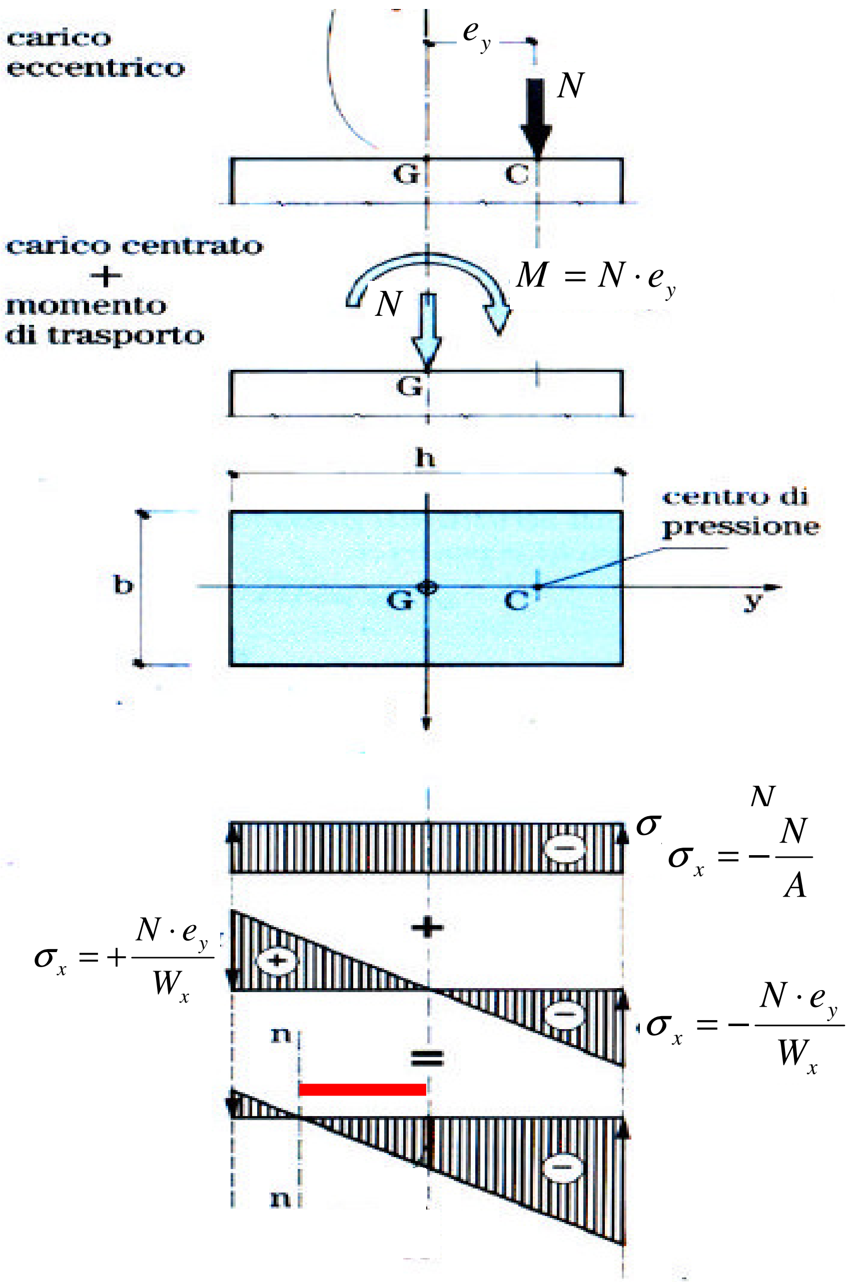
PRESSO-FLESSIONE

$$\sigma = - \frac{N}{A} \pm \frac{N \cdot e}{J_x} y$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$\sigma = \frac{N \cdot e}{J_x} y$$





Troviamo l’equazione dell’asse neutro imponendo:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e}{J_x} y_n = 0;$$

$$\frac{N \cdot e}{J_x} y_n = -\frac{N}{A};$$

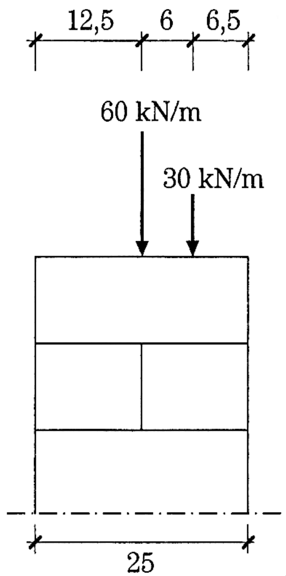
$$y_n = -\frac{N}{A}\frac{J_x}{N \cdot e}; \qquad y_n = -\frac{N}{A}\frac{J_x}{N \cdot e}$$

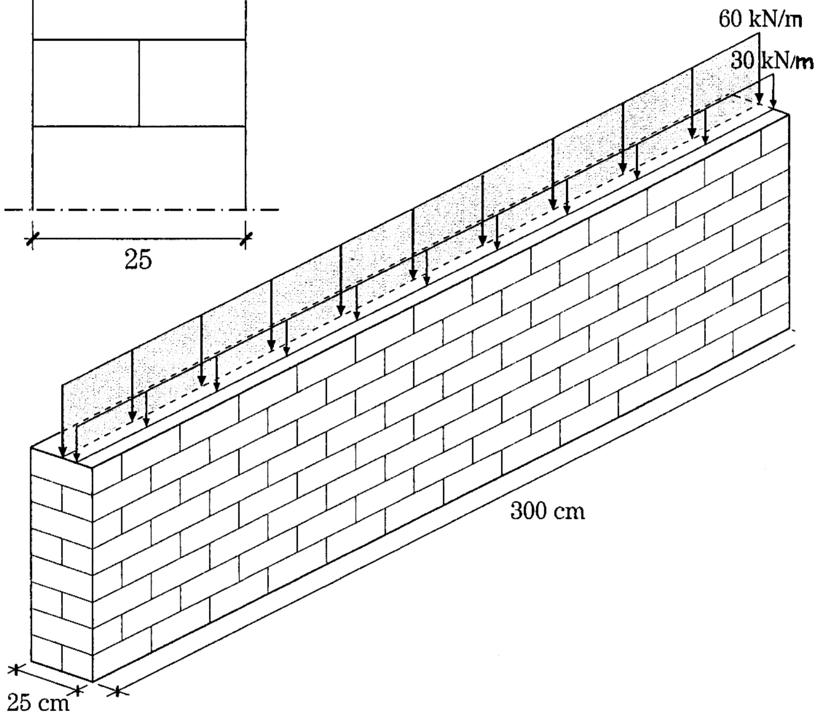
$$y = -\frac{J_x}{A \cdot e_n}$$

Distanza dell’asse neutro dall’asse baricentrico

ESEMPIO N°2

Sulla sommità di un muro di lunghezza b=300 cm e dello spessore s=25 cm gravano due carichi ripartiti rispettivamente ***q1=60 kN/m****, applicato in asse, e* ***q2=30 kN/m*** *applicato a 6 cm dall'asse. Determinare le tensioni massime e minime in sommità.*





I carichi concentrati agenti in sommità sono:

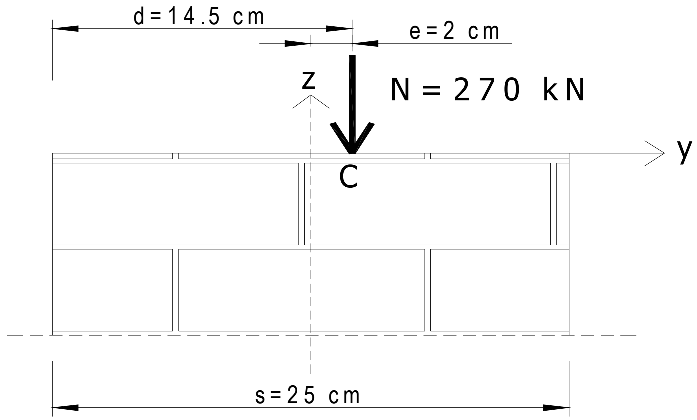
$Q_1^T = q_1 \cdot 3\ m = 180\ kN$; $Q_2^T = q_2 \cdot 3\ m = 90\ kN$

Assumiamo come polo lo spigolo sinistro della sezione e applichiamo il Teorema di Varignon per calcolare l'eccentricità del carico risultante:

$180 \cdot 12.5 + 90 \cdot 18.5 = (180 + 90) \cdot d$; $d = 14.5\ cm$

L'eccentricità del carico risultate N=270 kN è :

$e = 14.5 - 12.5 = +2\ cm$



Il momento d'inerzia baricentrico rispetto all'asse longitudinale del muro vale:

$$J_x = \frac{b \cdot s^3}{12} = \frac{3 \cdot 0.25^3}{12} = 0.0039 \ m^4$$

La tensioni massime minime sono:

$$\sigma_1 = -\frac{N}{A} + \frac{N \cdot e}{J_x}\frac{s}{2} = -\frac{270}{(3 \cdot 0.25)} + \frac{270 \cdot 0.02 \cdot 0.25}{2 \cdot 0.0039} = -360 + 173.07 = -186.92 \frac{kN}{m^2} = -0.186 \ MPa$$

$$\sigma_2 = -\frac{N}{A} - \frac{N \cdot e}{J_x}\frac{s}{2} = -\frac{270}{(3 \cdot 0.25)} - \frac{270 \cdot 0.02 \cdot 0.25}{2 \cdot 0.0039} = -360 - 173.07 = -533.07 \frac{kN}{m^2} = -0.533 \ MPa$$

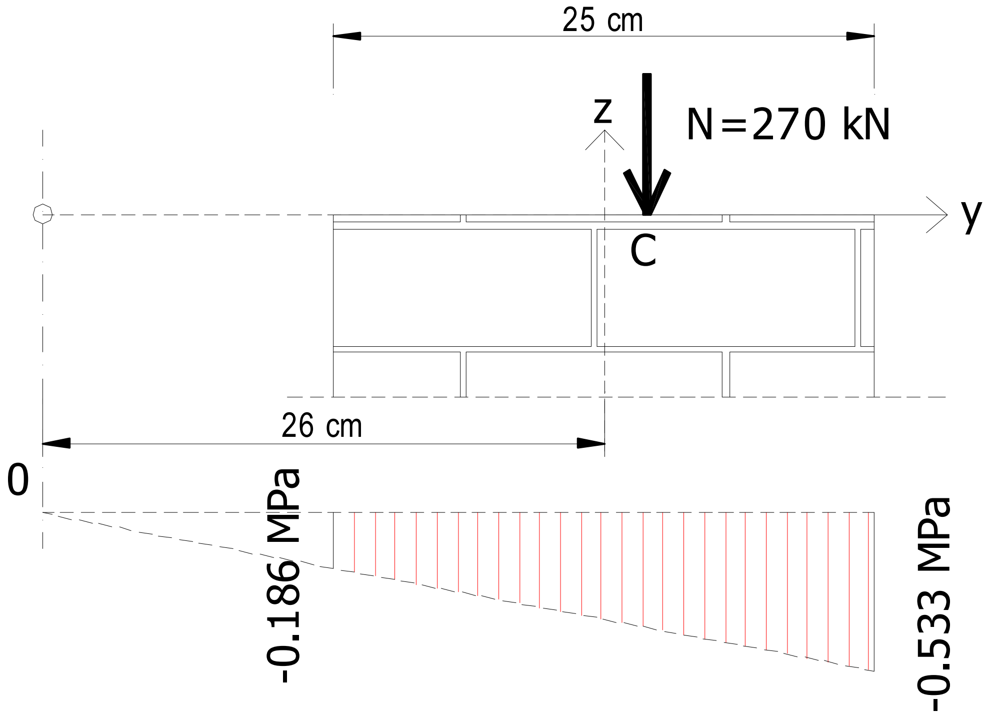
Calcoliamo la posizione dell'asse neutro:

$$y_n = -\frac{J_x}{A \cdot e} = -\frac{0.0039}{(3 \cdot 0.25) \cdot 0.02} = -0.26 \ m$$

Poiché 0.26 > 0.125 l'asse neutro è esterno alla sezione che risulta essere <u>completamente compressa.</u>

Ci troviamo in condizioni di:

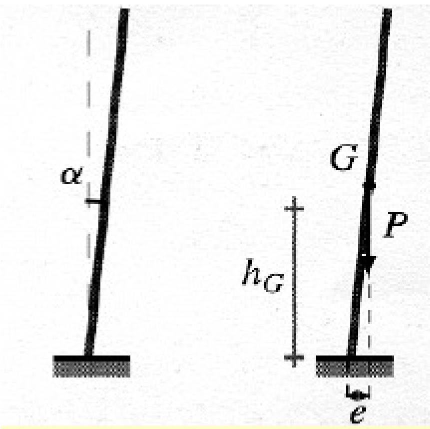
piccola eccentricità



ESEMPIO N°3: LA TORRE DI PISA

Calcolare le tensioni di scarico al suolo della torre di Pisa.

Assimiliamo la sezione trasversale della torre ad una corona circolare e adottiamo uno schema semplificato di asta mensola incastrata alla base.



a) **peso complessivo:** $P = 144$ **MN;**

b) **altezza torre** ≈ 56 **m;**

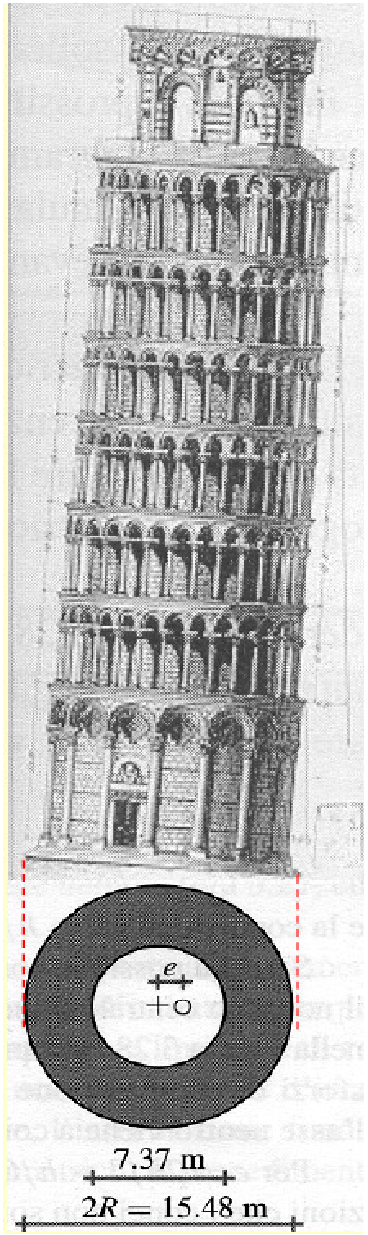
c) **inclinazione anni 90:** $\alpha = 5°33'$;

d) **quota baricentro** $h_G \simeq 24$ **m;**

e) **area base** $A \simeq 145.5$ $\mathbf{m^2}$;

f) **momento d'inerzia base** $I_x \simeq 2674$ $\mathbf{m^4}$;

c) **eccentricità** $e = h_G \tan\alpha \cong 2.33$ **m.**



La posizione dell'asse neutro è:

$$y_n = -\frac{J_x}{A \cdot e} = -\frac{2674}{145.5 \cdot 2.33} = -7.88\ m$$

Poiché 7.88 > 7.74 l'asse neutro è esterno alla sezione che risulta essere <u>completamente compressa:</u> **piccola eccentricità**

La tensioni massime minime sono:

$$\sigma_1 = -\frac{144000}{145.5} + \frac{144000 \cdot 2.33 \cdot 7.74}{2674} = -0.02\ MPa$$

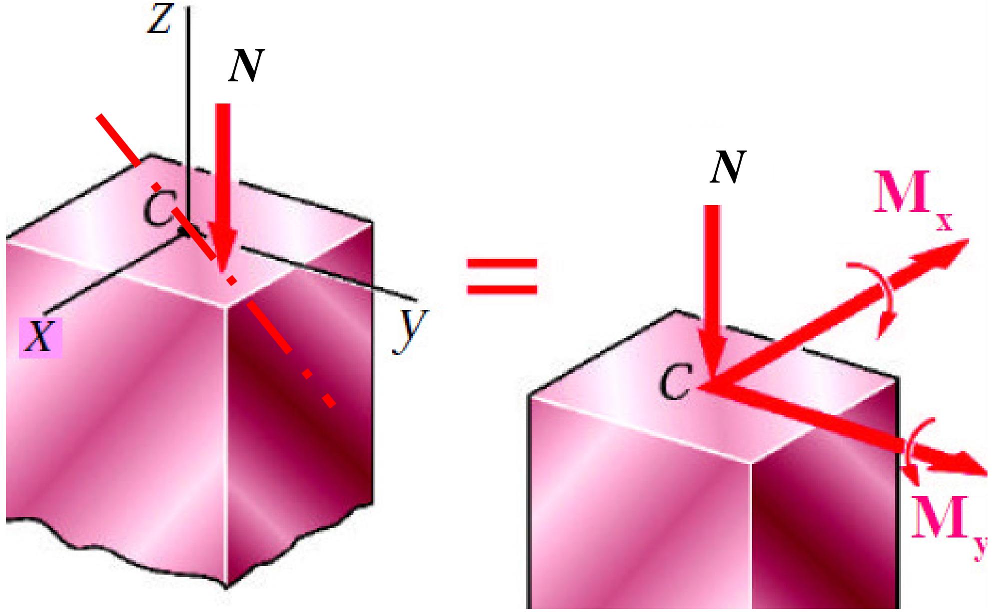
$$\sigma_2 = -\frac{144000}{145.5} - \frac{144000 \cdot 2.33 \cdot 7.74}{2674} = -1.96\ MPa$$

La sezione di base risulta <u>interamente compressa</u> pertanto non parzializzata. Ciò è compatibile con le caratteristiche di resistenza della muratura e del terreno di fondazione, entrambi <u>non</u> reagenti a trazione.

PRESSO-TENSO FLESSIONE DEVIATA

(AZIONE COMBINATA di FLESSIONE DEVIATA + SFORZO NORMALE)

La presso/tenso-flessione deviata è una sollecitazione che nasce da un sistema di forze composto da una forza N di compressione (o trazione) agente al di fuori del baricentro in modo tale da creare due flessioni rette con asse momento coincidente con i due assi centrali d'inerzia della sezione; la composizione di tali coppie fornisce una flessione deviata.



TENSO-FLESSIONE DEVIATA

$$\sigma = +\frac{N}{A} \pm \frac{N \cdot e_y}{J_x} y \pm \frac{N \cdot e_x}{J_y} x$$

PRESSO-FLESSIONE DEVIATA

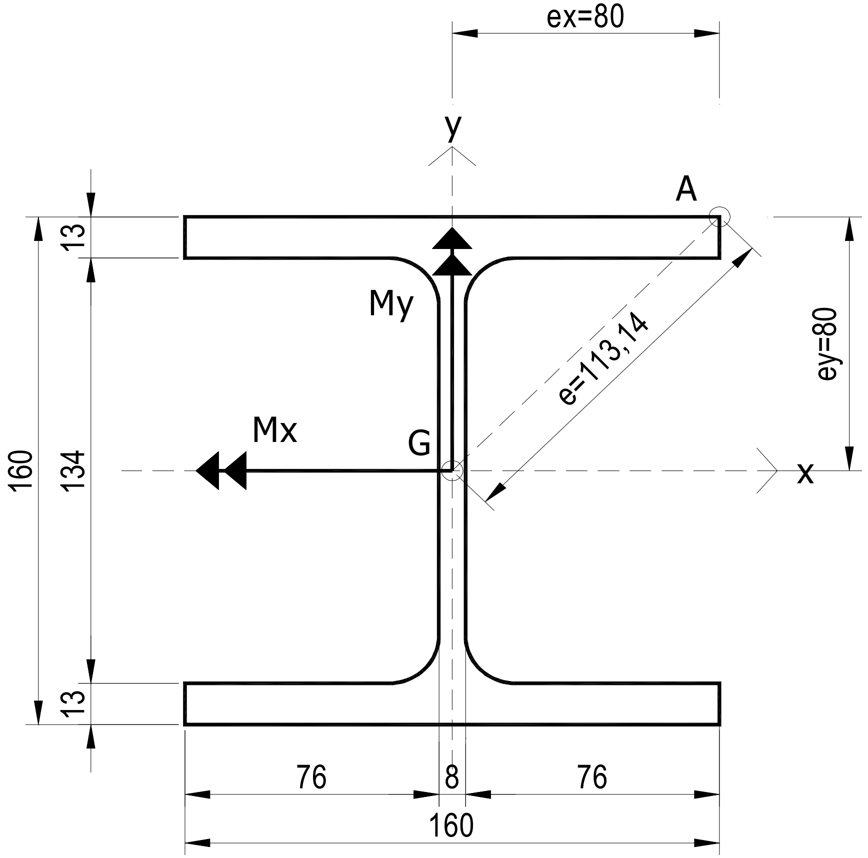
$$\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{N \cdot e_y}{J_x} y \pm \frac{N \cdot e_x}{J_y} x$$

Per esplicitare l'andamento delle tensioni nel grafico bisognerà conoscere:

- l'asse di sollecitazione, che in una sezione passa per il punto d'applicazione della forza e per il baricentro di tale sezione;
- l'asse neutro, che si può trovare eguagliando a zero la formula trinomia di Navier.

ESEMPIO N°4

*Determinare la distribuzione delle tensioni sulla sezione di un profilato **HEB 160** sottoposto ad uno sforzo normale di compressione **N=60 kN** applicato nel punto A rappresentato in figura.*



Dalle tabelle si ricavano le caratteristiche della sezione:

```
Area       54.3       cm^2

  Momenti d'inerzia
    Jx          2492  cm^4
    Jy           889  cm^4
    Jxy         0.00  cm^4

  Moduli di resistenza
    Wx           311  cm^3
    Wy           111  cm^3
```

Calcoliamo i momenti rispetto agli assi:

$$M_x = N \cdot e_y = 60 \cdot 8 = 480 \; kNcm$$ NEGATIVO

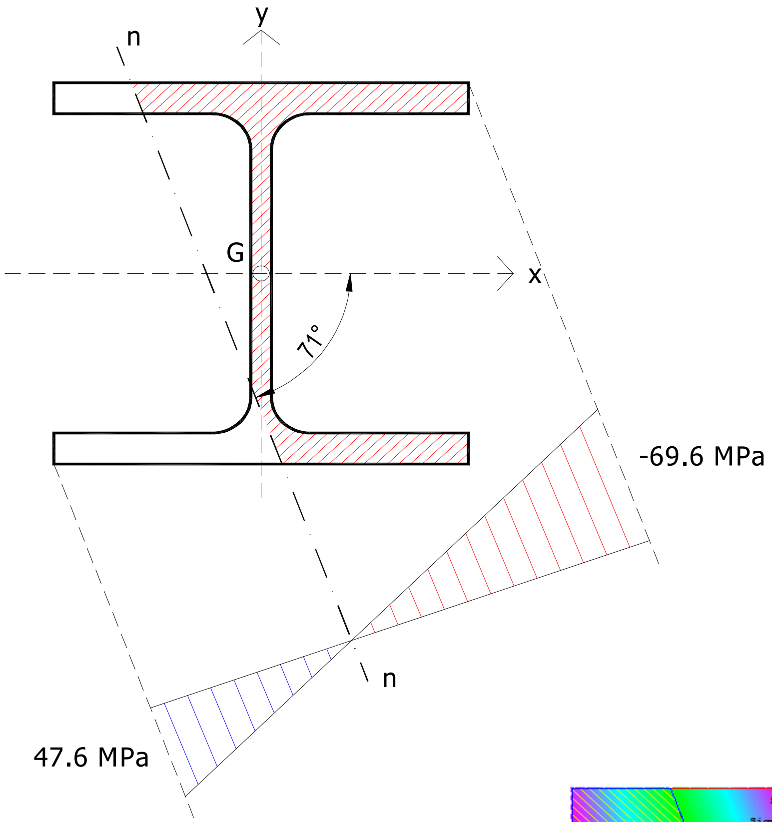
$$M_y = N \cdot e_x = 60 \cdot 8 = 480 \; kNcm$$ NEGATIVO

L'equazione dell'asse neutro è:

$$-\frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = 0 \; ; -\frac{60}{54.3} - \frac{480}{2492} y - \frac{480}{889} x = 0$$

$$-1.10 - 0.19y - 0.54x = 0 \; ; \; y = -2.84x - 5.79$$

Inclinazione: $\alpha = \arctan(-2.84) \cong -71°$

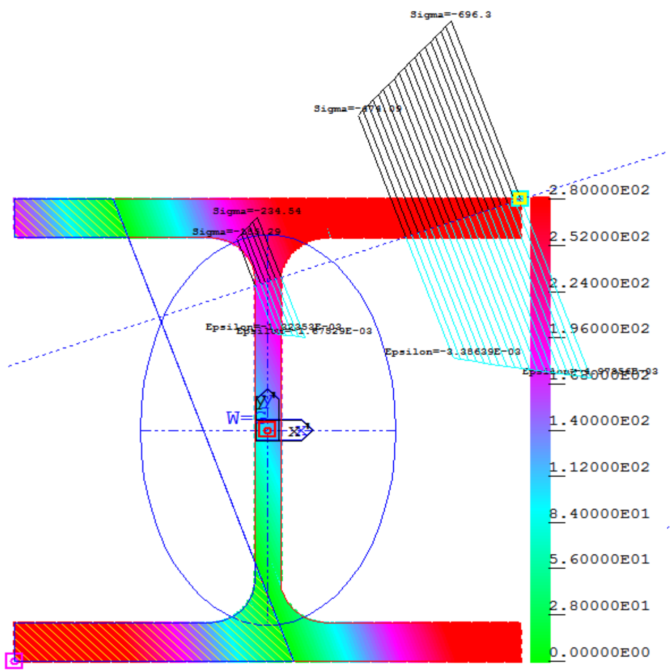


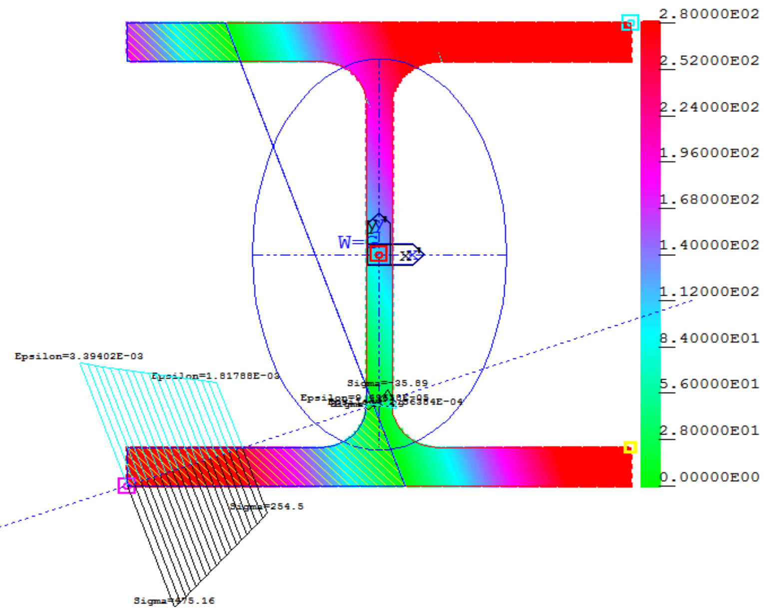
Calcolo delle tensioni:

$$\sigma_1 = -\frac{N}{A} - \left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}\right) = -\frac{60}{54.3} - \left(\frac{480}{311} + \frac{480}{111}\right) = -6.96\frac{kN}{cm^2} = -69.6MPa$$

$$\sigma_2 = -\frac{N}{A} + \left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}\right) = -\frac{60}{54.3} + \left(\frac{480}{311} + \frac{480}{111}\right) = 4.76\frac{kN}{cm^2} = 47.6MPa$$

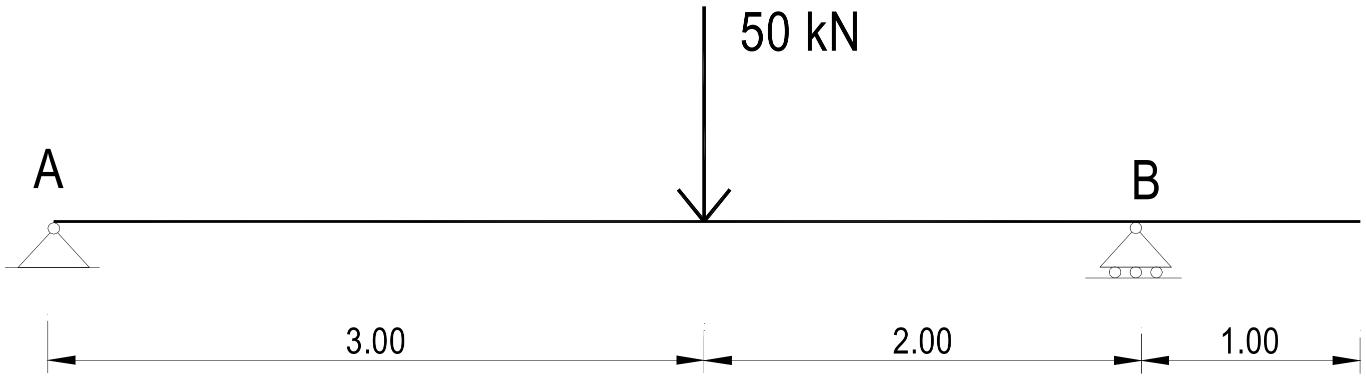
Si riporta di seguito la mappatura dello stato tensionale nella sezione valutata attraverso una procedura di calcolo numerico.

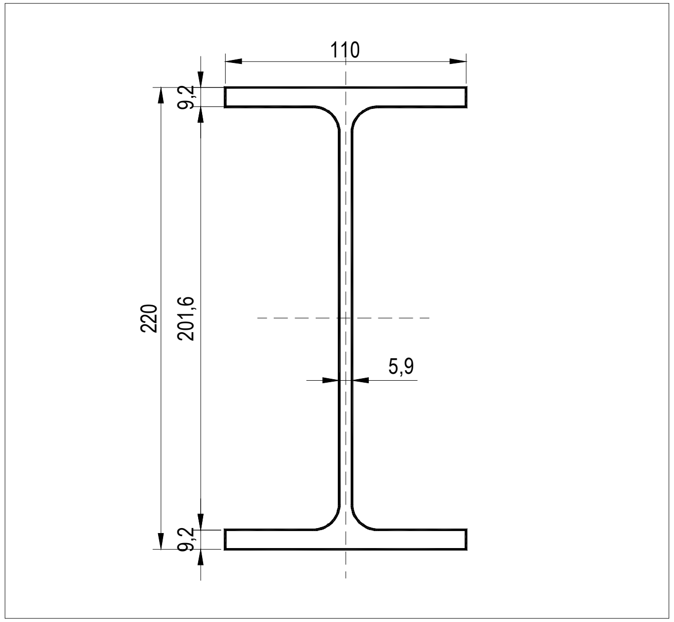




ESERCIZIO N°1

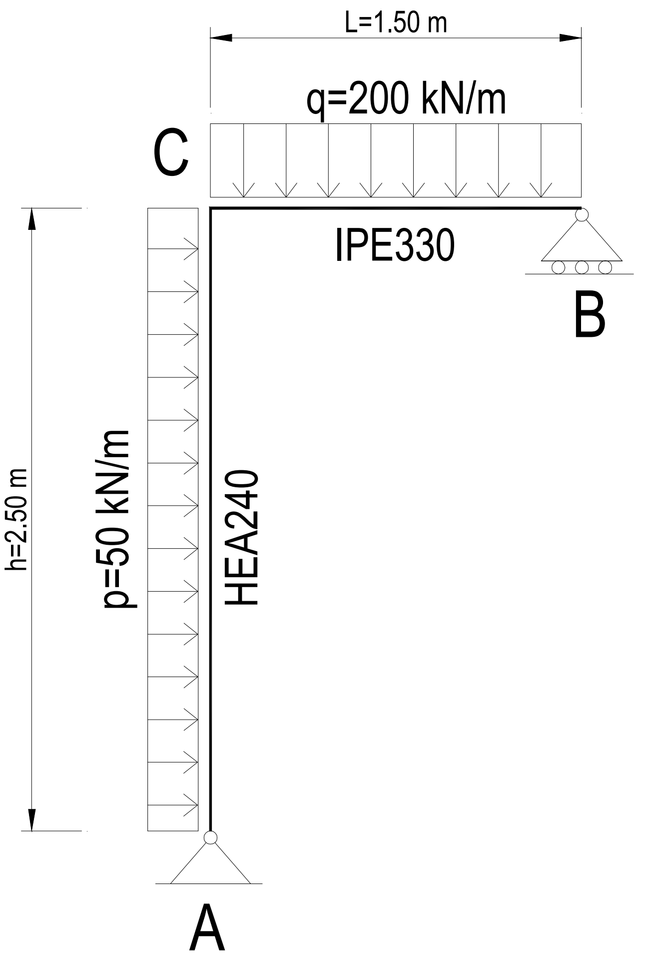
*La trave rappresentata in figura è realizzata con un profilo in acciaio **IPE 220**. Calcolare lo stato tensionale in corrispondenza della sezione maggiormente sollecitata.*

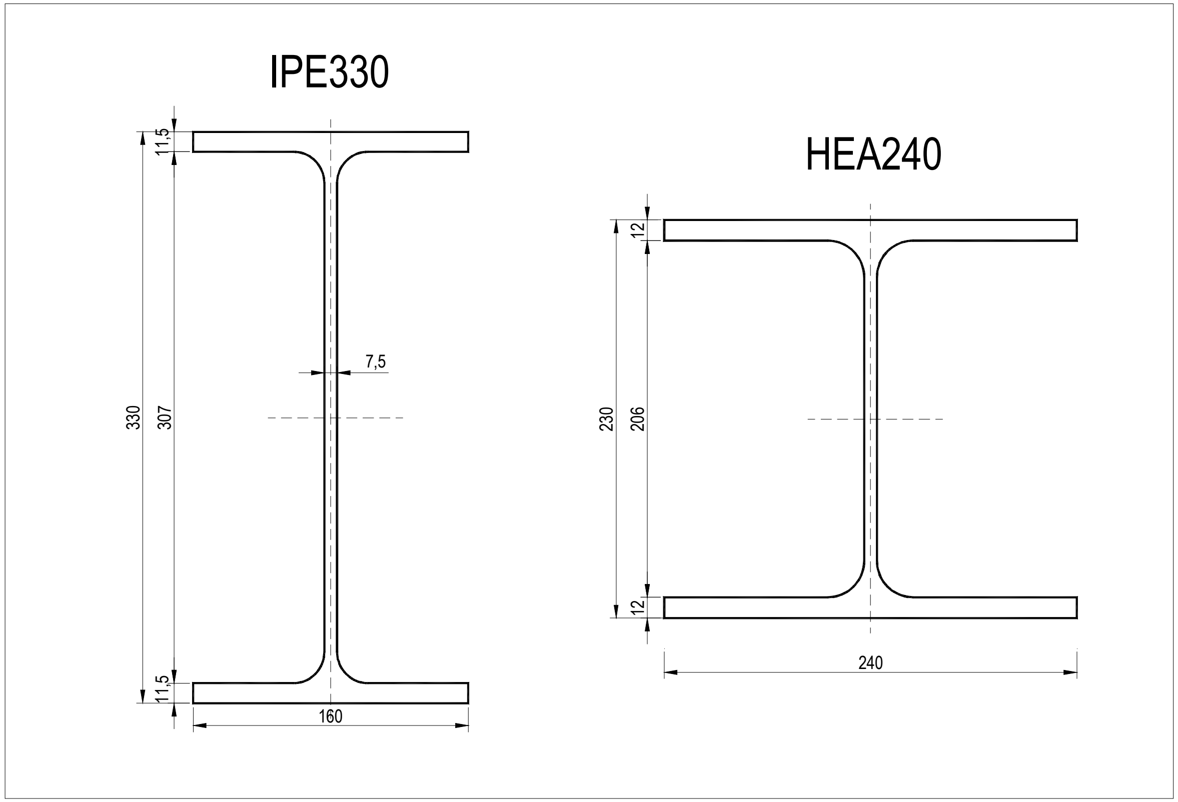




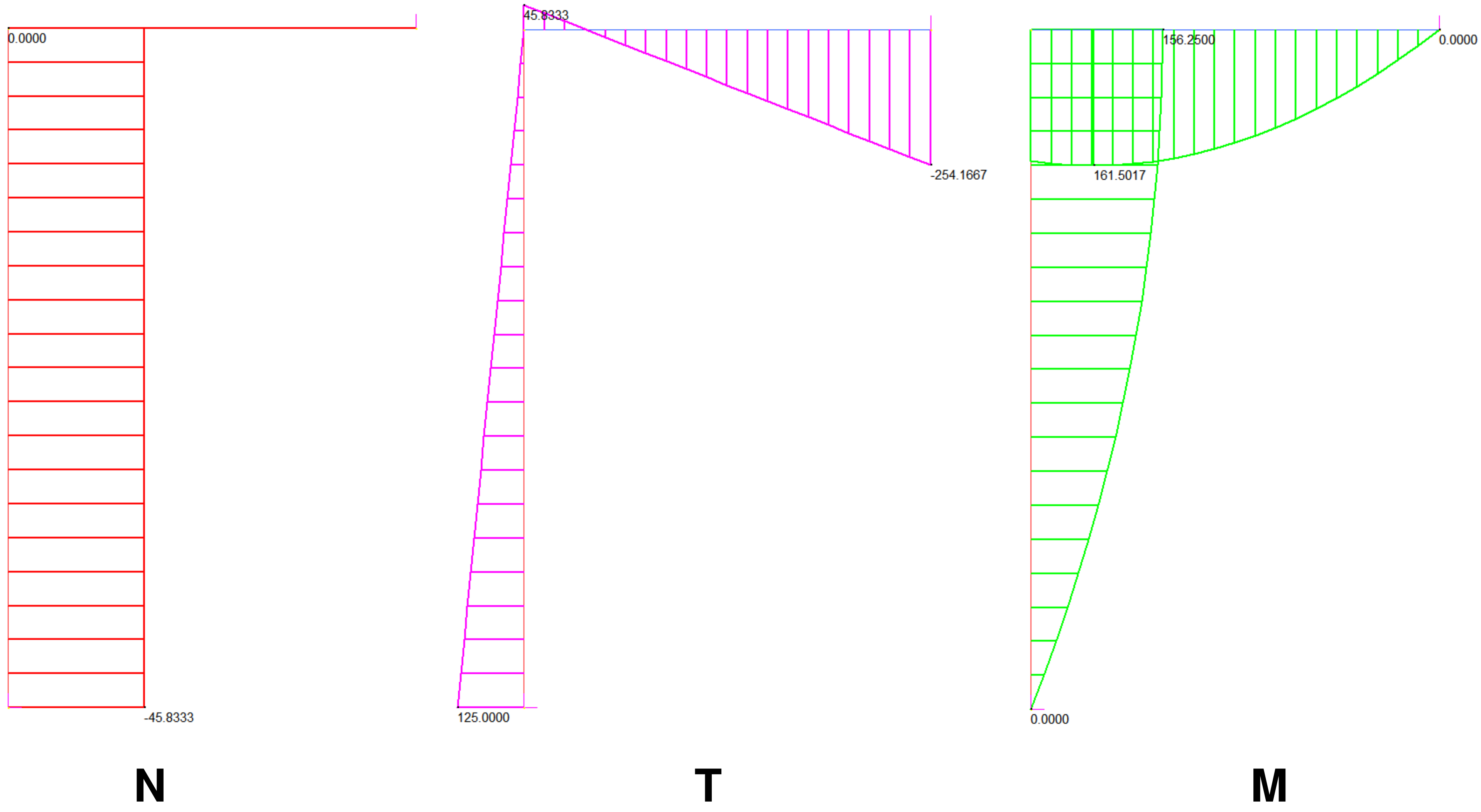
ESERCIZIO N°2

Data la struttura in figura, determinare lo stato tensionale della trave e del pilastro nelle sezioni maggiormente sollecitate.





Caratteristiche della sollecitazione



Dalle tabelle si ricavano le caratteristiche della sezione:

IPE 330

Peso	49.15	daN/m
Area	62.62	cm^2
Jx	11769.15	cm^4
Jy	788.15	cm^4
Wx	713.28	cm^3
Wy	98.52	cm^3

HEA 240

Peso	60.33	daN/m
Area	76.85	cm^2
Jx	7764.47	cm^4
Jy	2768.84	cm^4
Wx	675.17	cm^3
Wy	230.74	cm^3

TENSIONI PILASTRO

La sezione più sollecitata è la sezione C in cui **M=156.25 kNm** e **N=-45.83 kN**. Poiché il piano si sollecitazione contiene l'asse y del profilo, siamo in presenza di PRESSOFLESSIONE RETTA. Le fibre tese sono quelle di destra, cioè quelle inferiori nel riferimento locale dell'asta. Il momento va considerato negativo in quanto le fibre tese sono dalla parte del semiasse negativo dell'asse y.

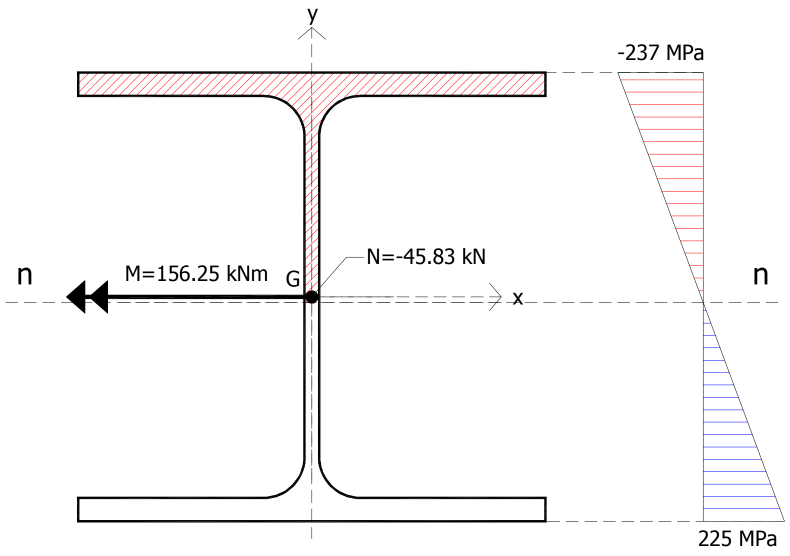
L'equazione dell'asse neutro è:

$$-\frac{N}{A}-\frac{M}{J_x}y=0 \qquad -\frac{45.83}{76.85}-\frac{15625}{7764.47}y=0 \qquad y=-0.30\ cm$$

La tensioni massime e minime sono:

$$\sigma_1=-\frac{N}{A}+\frac{M}{W_x}=-\frac{45.83}{76.85}+\frac{15625}{675.17}=22.54\ \frac{kN}{cm^2}=225\ MPa$$

$$\sigma_2=-\frac{N}{A}-\frac{M}{W_x}=-\frac{45.83}{76.85}-\frac{15625}{675.17}=-23.74\ \frac{kN}{cm^2}=-237\ MPa$$

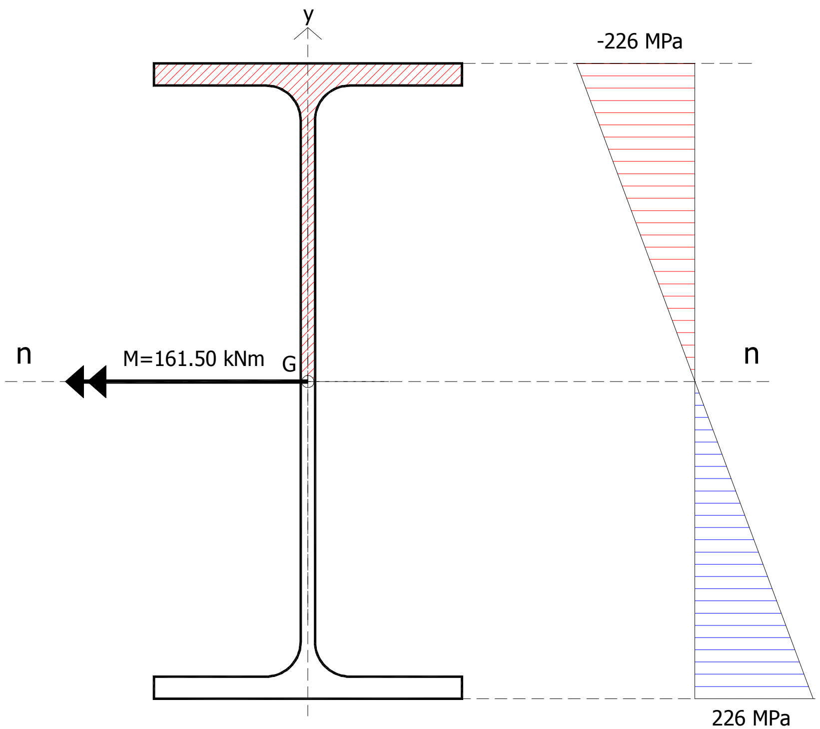


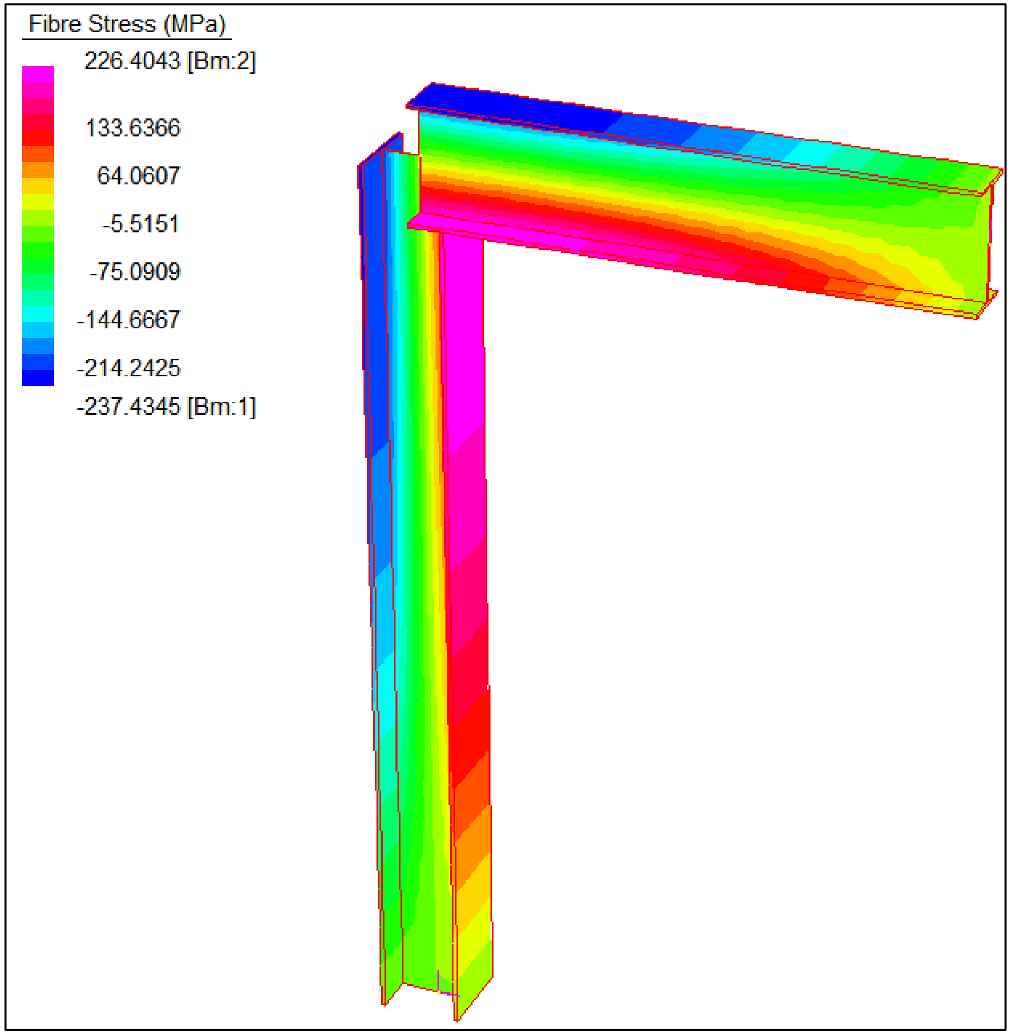
TENSIONI TRAVE

La sezione più sollecitata è quella in corrispondenza della quale il taglio si annulla e, di conseguenza, il momento e massimo e vale **M=161.50 kNm**. Non c'è sforzo normale pertanto siamo in presenza di FLESSIONE RETTA. Le fibre tese sono quelle inferiori nel riferimento locale dell'asta.

La tensioni massime e minime sono:

$$\sigma_1 = \pm \frac{M}{W_x} = \frac{16150}{713.28} = \pm 22.64 \frac{kN}{cm^2} = \pm 226\ MPa$$





Fonti

- Facoltà di ingegneria – Università degli studi di Messina - Materiale didattico