Sussidi didattici per il corso di
COSTRUZIONI EDILI

Prof. Ing. Francesco Zanghì

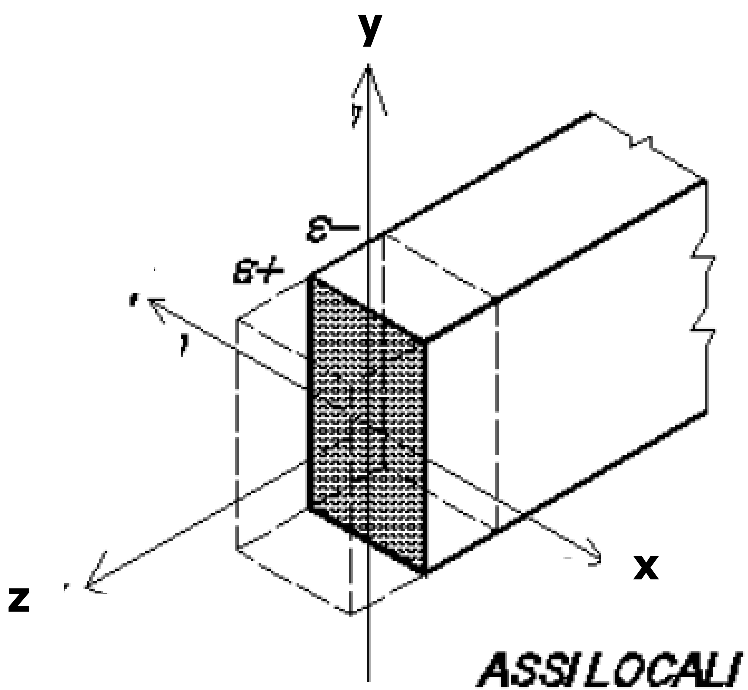
SOLLECITAZIONI SEMPLICI

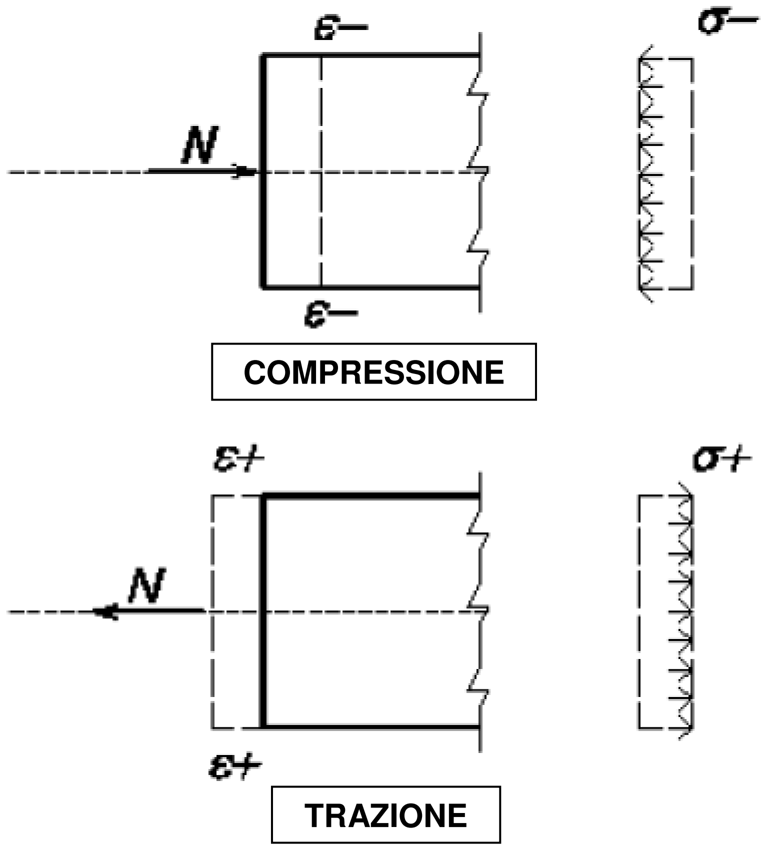
AGGIORNAMENTO 04/10/2011

SFORZO NORMALE CENTRATO

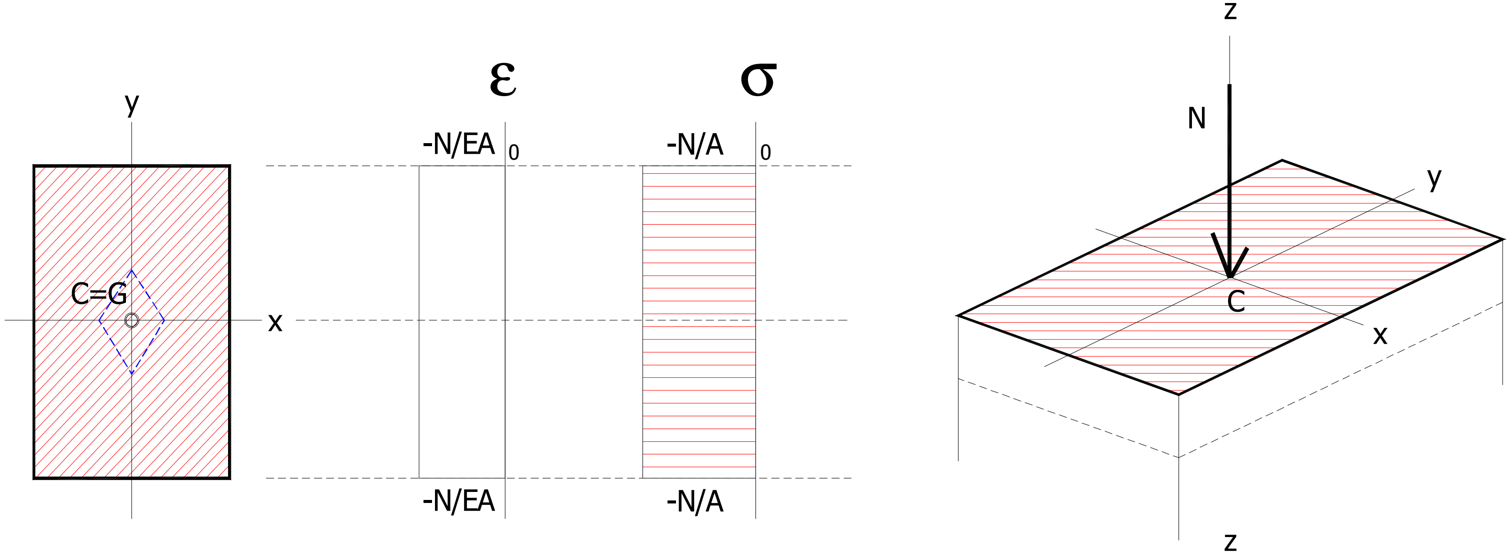
Lo sforzo normale si definisce centrato quando una forza, o un sistema di forze, agisce lungo l'asse baricentrico longitudinale dell'elemento strutturale. Può essere di due tipi:

- **TRAZIONE** (allungamento)
- **COMPRESSIONE** (accorciamento)





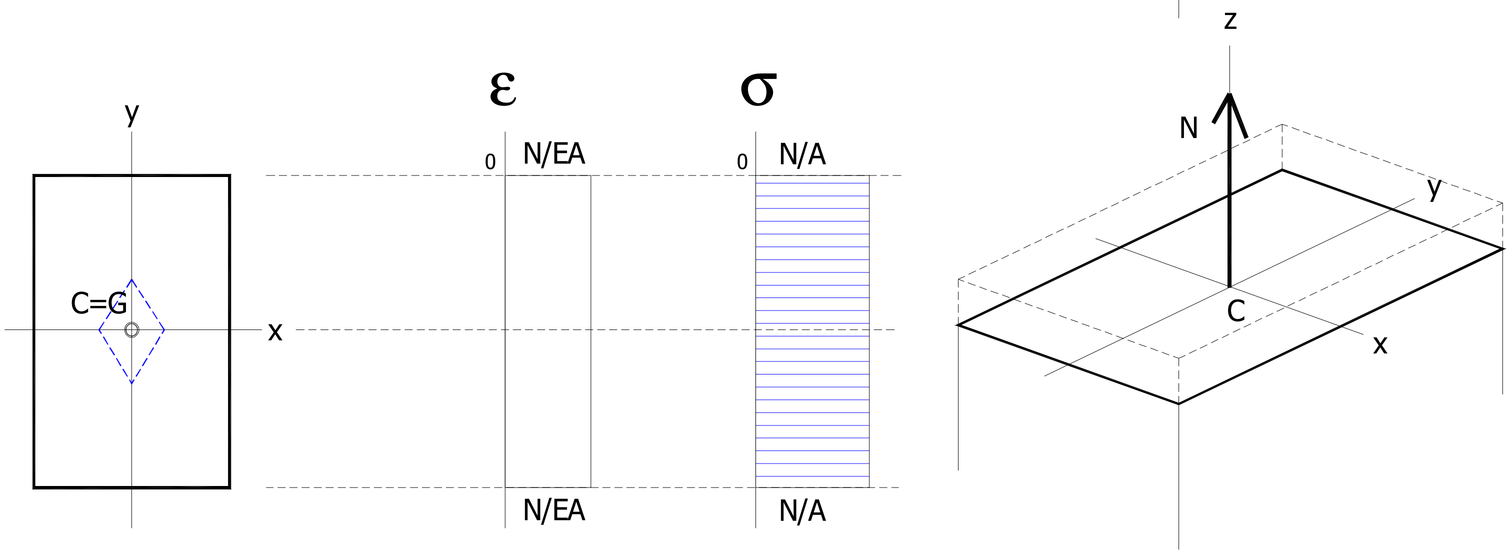
La sollecitazione produce diagrammi di tensione e deformazione entrambi **uniformi**.



N<0

$$\sigma = -\frac{N}{A}$$

$$\varepsilon = -\frac{N}{EA}$$



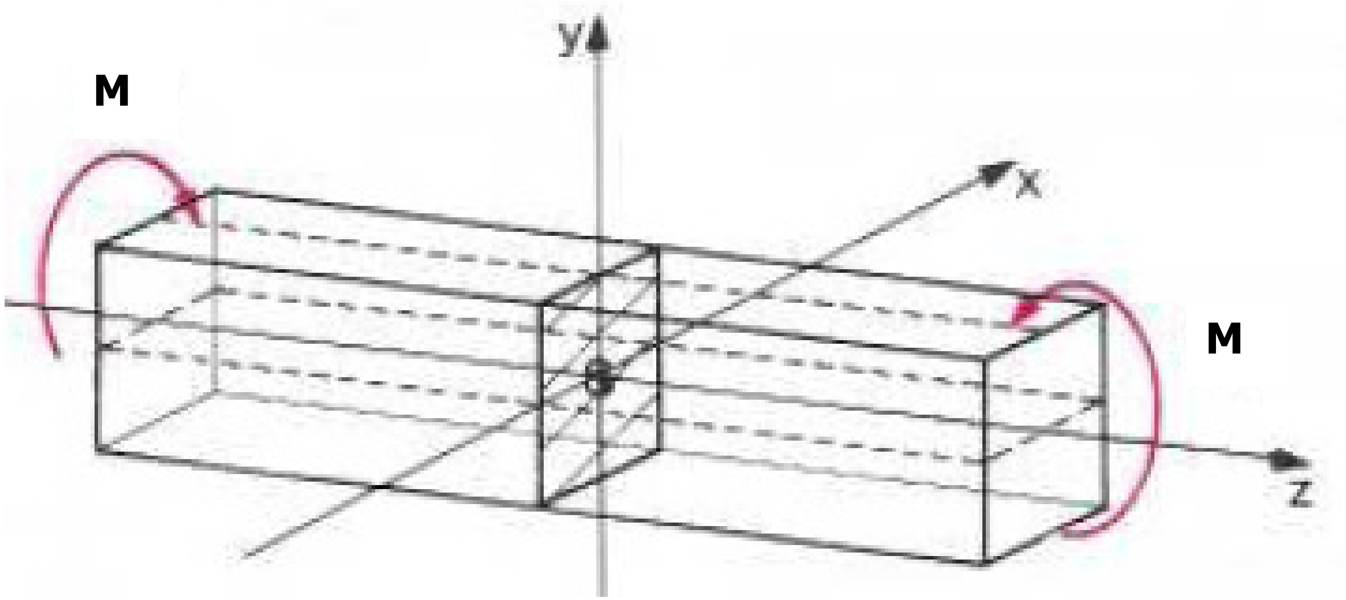
N>0

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

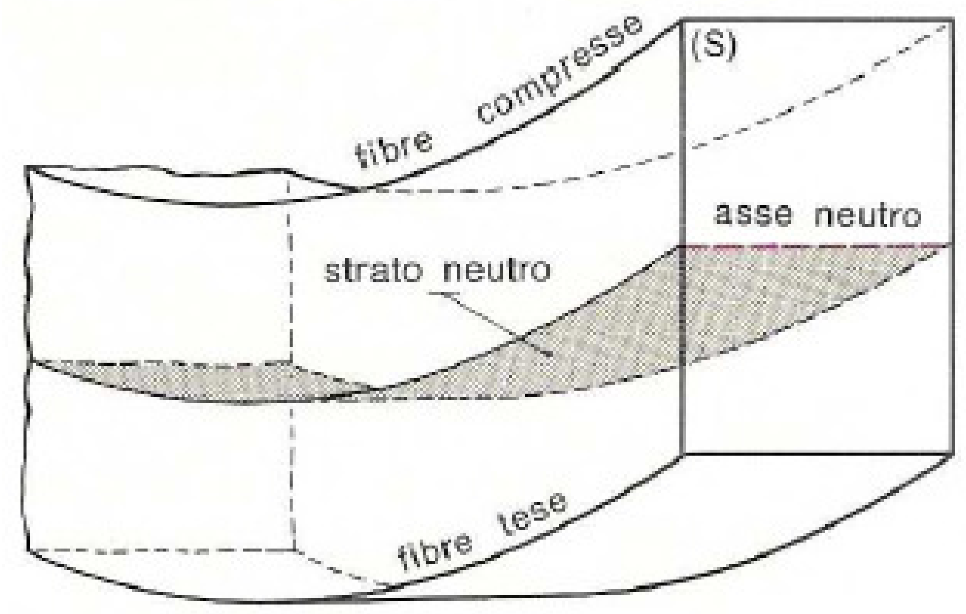
$$\varepsilon = \frac{N}{EA}$$

FLESSIONE RETTA

Un elemento strutturale è soggetto a **flessione retta** quando il sistema di forze esterne si riduce ad una coppia di momento **M** che agisce su un **piano di sollecitazione,** contenente l'asse longitudinale della trave. La traccia del piano di sollecitazione sul piano della sezione è anche asse principale di inerzia per la sezione stessa.



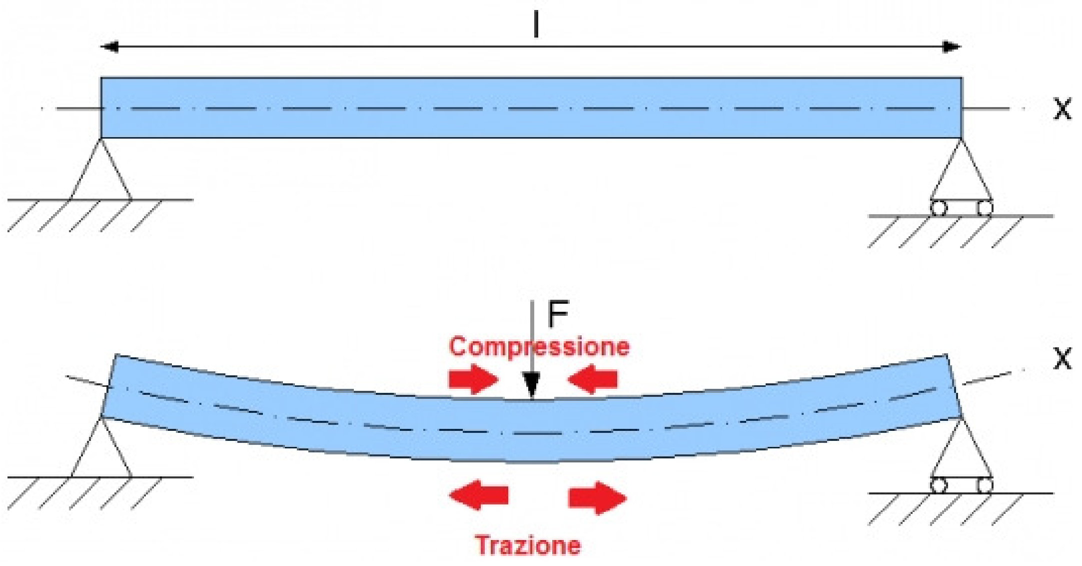
La deformazione subita dall'elemento è un incurvamento secondo un arco di circonferenza. Le fibre superiori all'asse longitudinale subiranno un **accorciamento** mentre le fibre inferiori subiranno un **allungamento** (o viceversa in base al segno del momento flettente).

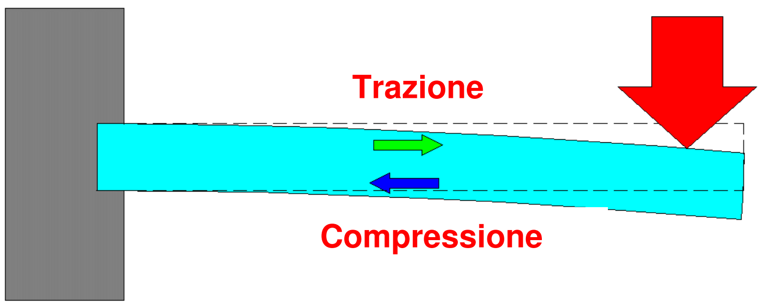


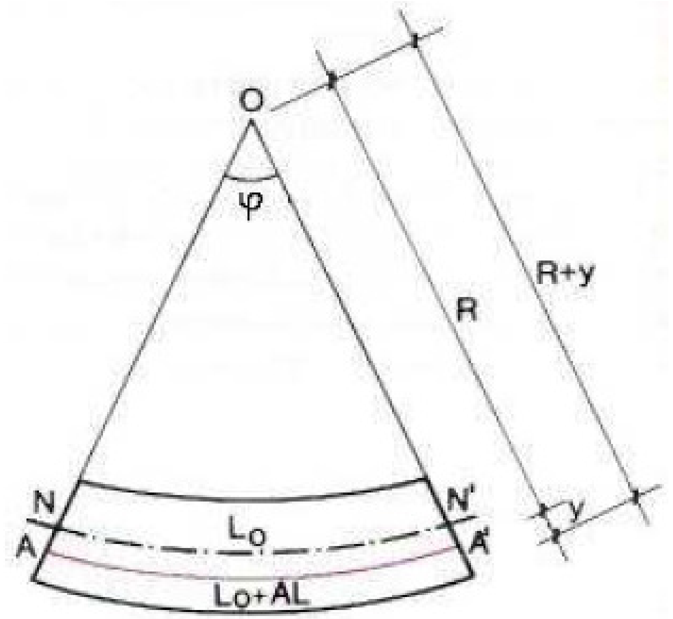
Le fibre appartenenti allo strato comprendente l'asse longitudinale non subiranno né allungamento né accorciamento (*strato neutro).*

L'intersezione tra lo strato neutro ed una qualsiasi sezione della trave viene definito **asse neutro**.

Durante la deformazione, la sezione RUOTA attorno all'asse neutro.







$$\frac{L_0+\Delta L}{L_0}=\frac{R+y}{R}\Rightarrow 1+\frac{\Delta L}{L_0}=1+\frac{y}{R}\Rightarrow\frac{\Delta L}{L_0}=\frac{y}{R}\qquad \textbf{(1)}$$

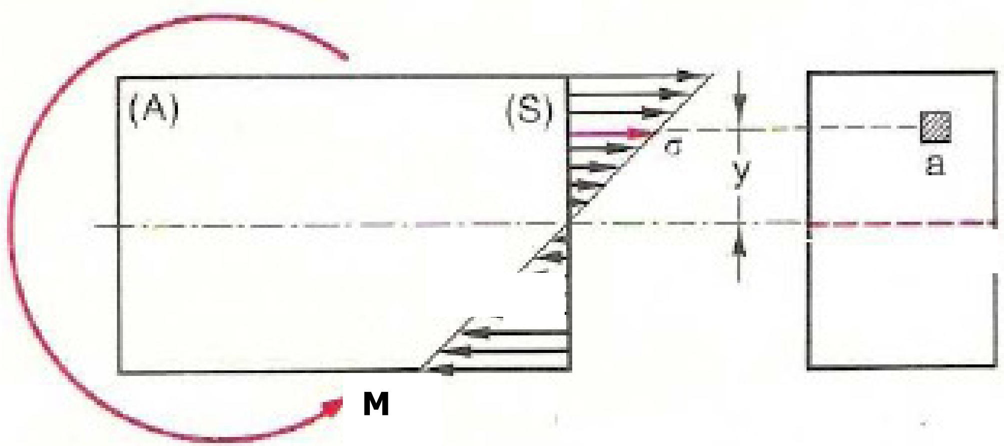
Il rapporto 1/R si chiama **curvatura**.

Poiché $\varepsilon=\dfrac{\Delta L}{L_o}$ si ricava $\sigma=E\varepsilon=\dfrac{E\,y}{R}$

Le tensioni e le deformazioni avranno *andamento lineare* lungo l'asse verticale della sezione.

y

Esaminiamo l'equilibrio alla rotazione di una generica sezione S.

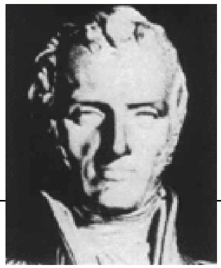


Il momento flettente esterno deve essere equilibrato dal momento interno generato dalle singole forze elementari σ·a ciascuna moltiplicata per il relativo braccio y.

$$\sum\sigma a\,y=\frac{E}{R}\sum a\,y^2=\frac{E J_n}{R}=M$$

Poiché, dalla (1) R= y/ε si ricava:

$$\varepsilon=\frac{M\,y}{E J_n}\quad\text{pertanto:}\quad\boxed{\sigma=\frac{M\;y}{J_n}}\qquad\textbf{(2)}$$

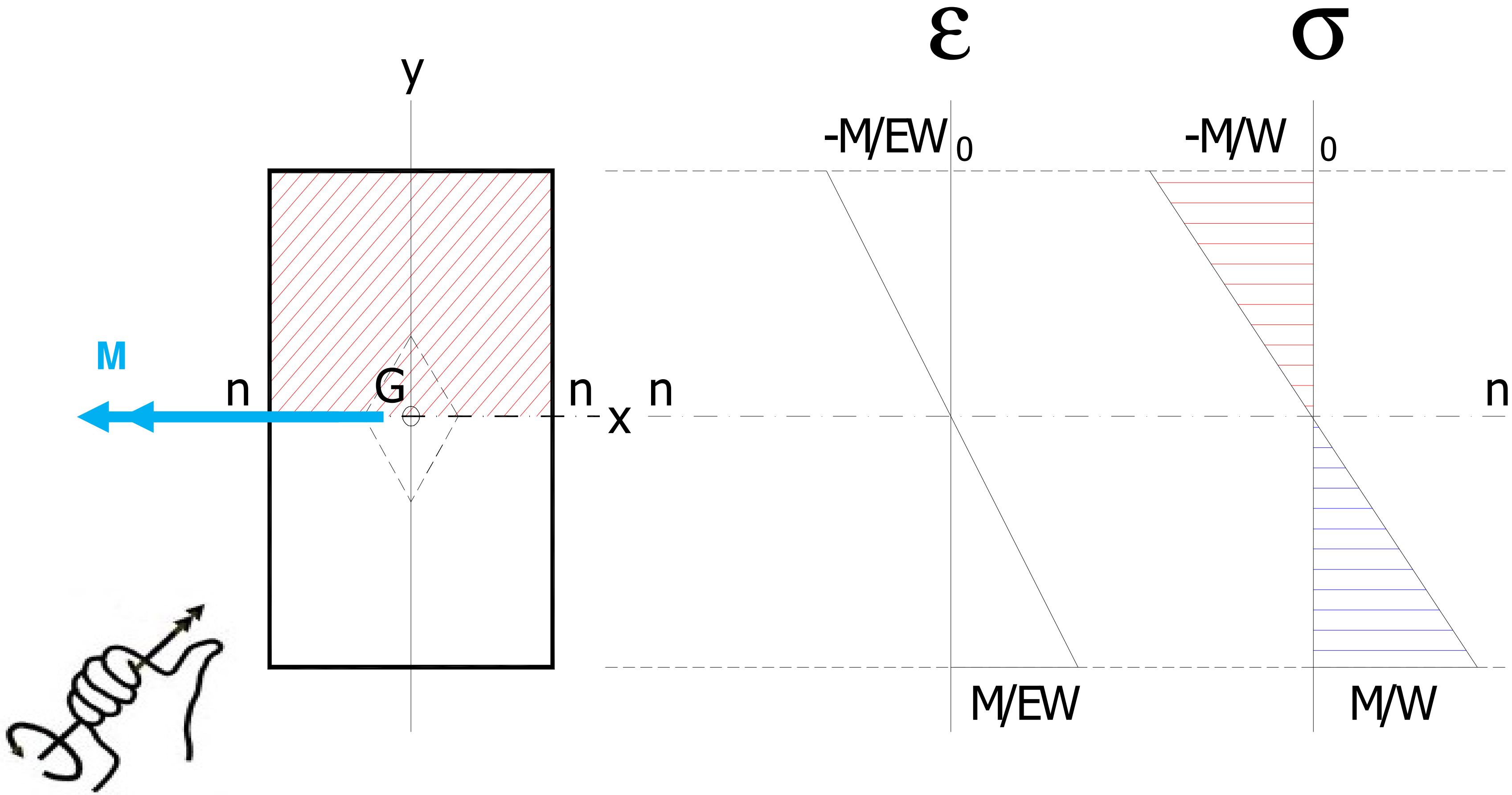


FORMULA DI NAVIER

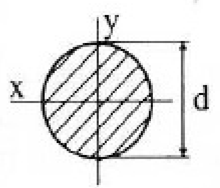
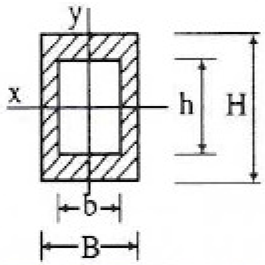
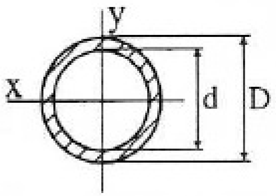
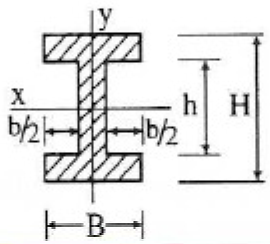
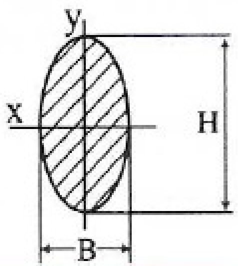
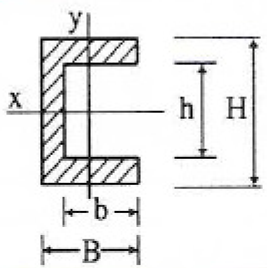
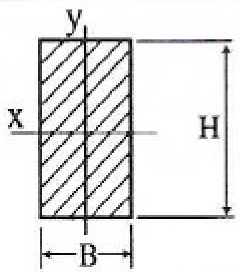
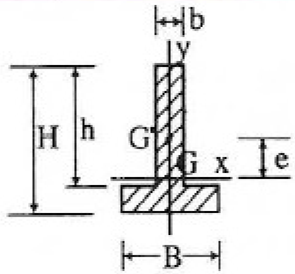
I valori di massima trazione e massima compressione si hanno in corrispondenza delle fibre estreme della sezione, poste ad una distanza $\mathbf{y_{max}}$ dall' asse neutro.

$$W = \frac{J_n}{y_{max}}$$

MODULO DI RESISTENZA per flessione della sezione.

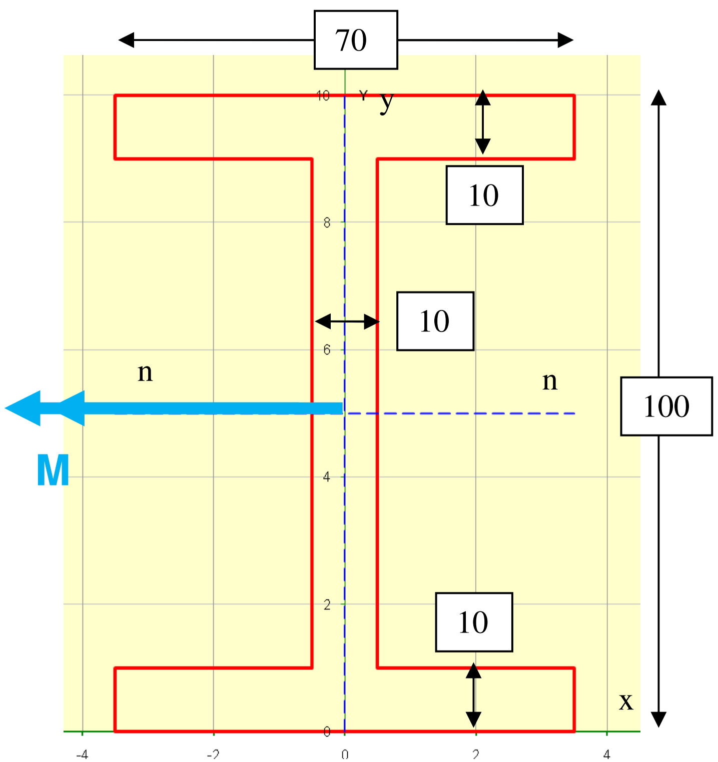


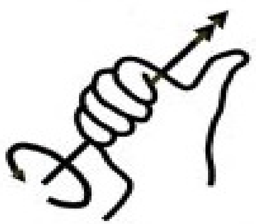
Tab. 1 – Moduli di resistenza a flessione W_f per alcuni tipi di sezioni

	$W_x = W_y = \frac{\pi}{32} d^3 \simeq 0{,}1 \cdot d^3$		$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
	$W_x = W_y = \frac{\pi}{32}\frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{\pi}{32} D^3 (1 - c^4)$ $c = \frac{d}{D}$		$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
	$W_x = \frac{\pi}{32} B \cdot H^3$ $W_y = \frac{\pi}{32} H \cdot B^3$		$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
	$W_x = \frac{B \cdot H^2}{6}$ $W_y = \frac{H \cdot B^2}{6}$ con $B = H = L$: $W = \frac{L^3}{6}$		$W_x = \frac{I_x}{e + \frac{h}{2}}$ $W_y = \frac{HB^3 + hb^3}{6B}$

ESEMPIO N°1

E' assegnata la seguente sezione a doppio T sottoposta all'azione di un momento flettente esterno ***M=100000 Nmm****. Calcolare la tensione massima a cui la sezione è sottoposta.*





Calcoliamo il momento di inerzia baricentrico orizzontale della sezione come differenza tra il momento di inerzia del rettangolo 70x100 e i momenti di inerzia dei rettangoli interni 30x80.

$$J_n = \frac{70 \cdot 100^3}{12} - 2\left(\frac{30 \cdot 80^3}{12}\right) = 5833333 - 2(1280000) = 3273333 \ mm^4$$

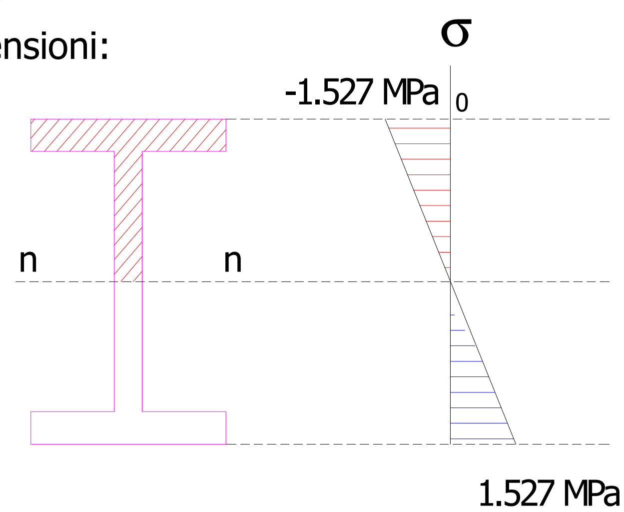
Calcoliamo il modulo di resistenza a flessione della sezione:

$$W = \frac{J_n}{y_{max}} = \frac{3273333}{50} = 65467 \ mm^3$$

Calcoliamo la tensione massima:

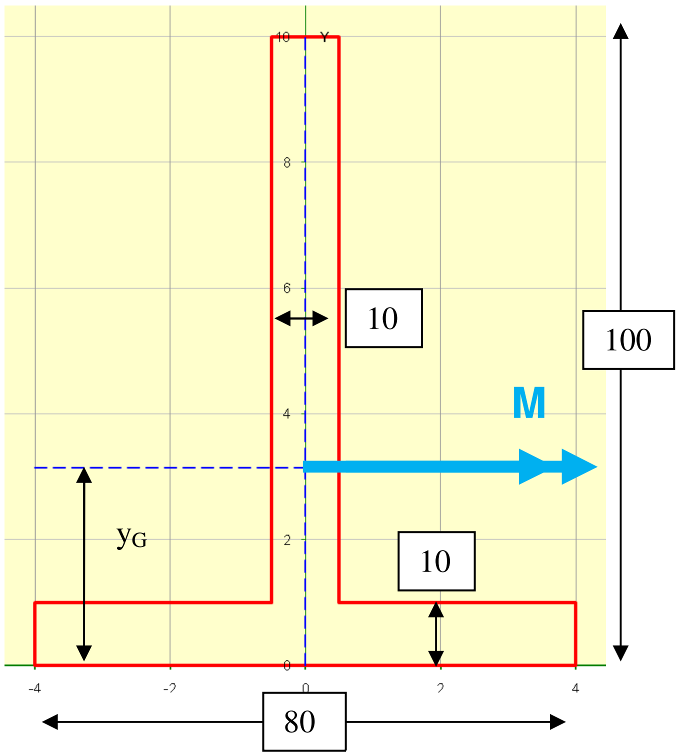
$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{100000}{65467} = 1.527 \frac{N}{mm^2} = 1.527 \ MPa$$

Tracciamo il diagramma delle tensioni:



ESEMPIO N°2

E' assegnata la seguente sezione a T rovescia sottoposta all'azione di un momento flettente esterno ***M=-200000 Nmm****. Calcolare la tensione massima a cui la sezione è sottoposta.*



Suddividiamo la figura nei rettangoli elementari 80x10 e 10x90.
Calcoliamo l'ordinata del baricentro e quindi la posizione dell'asse neutro:

$$y_G = \frac{S_x}{A_{tot}} = \frac{(80 \cdot 10 \cdot 5) + (10 \cdot 90 \cdot 55)}{(80 \cdot 10) + (10 \cdot 90)} = \frac{53500}{1700} = 31.47\ mm$$

Calcoliamo il momento d'inerzia baricentrico della sezione:

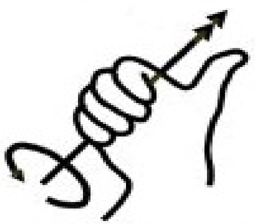
$$J_n = \left(\frac{10 \cdot 90^3}{12} + 900 \cdot 23.53^2 \right) + \left(\frac{80 \cdot 10^3}{12} + 800 \cdot 26.47^2 \right) = 1672990\ mm^4$$

Calcoliamo il moduli di resistenza delle fibre estreme della sezione:

$$W^s{}_x = \frac{J_n}{(h - y_G)} = \frac{1672990}{68.53} = 24412.5 mm^3$$

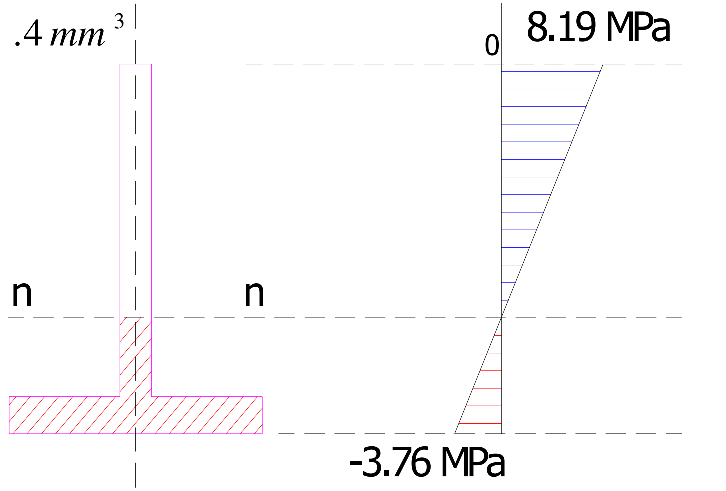
$$W^i{}_x = \frac{J_n}{y_G} = \frac{1672990}{31.47} = 53161.4\, mm^3$$

Calcoliamo la tensione massima e minima:



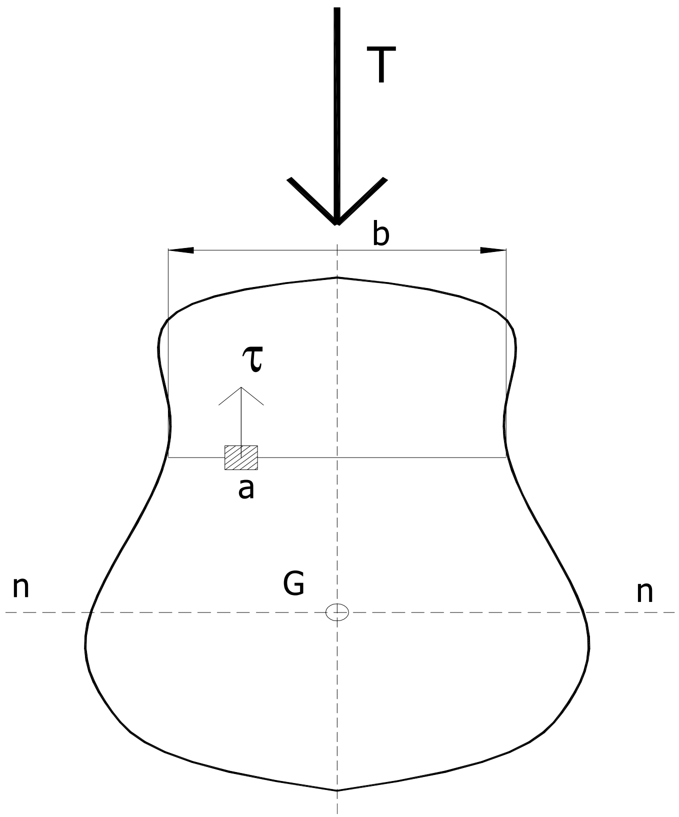
$$\sigma^s = \frac{M}{W^s{}_x} = \frac{200000}{24412.5} = 8.19\ MPa$$ (trazione)

$$\sigma^i = \frac{M}{W^i{}_x} = \frac{200000}{53161.4} = 3.76\ MPa$$ (compressione)



TAGLIO

Si ha sollecitazione di taglio quando sulla struttura sono applicate forze con direzione perpendicolare al suo asse, giacenti sul piano della sezione e passanti per il suo baricentro. Le tensioni interne, dovendo opporsi a tale deformazione, giacciono sul piano della sezione, quindi sono delle **tensioni tangenziali τ.**



Per l'equilibrio alla traslazione verticale: $\sum \tau \cdot a = T$

Si dimostra che:

$$\boxed{\tau = \frac{T \cdot S_n^*}{b \cdot J_n}}$$

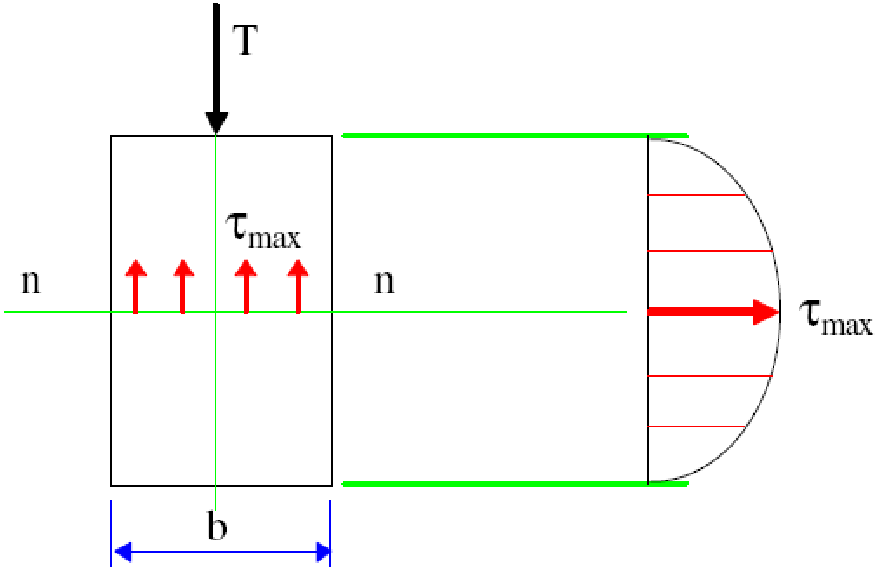
FORMULA DI JOURAWSKI

S^*_n = **momento statico** (rispetto all'asse baricentrico) di una delle due parti di sezione individuate dalla dividente parallela all'asse baricentrico nel punto di calcolo

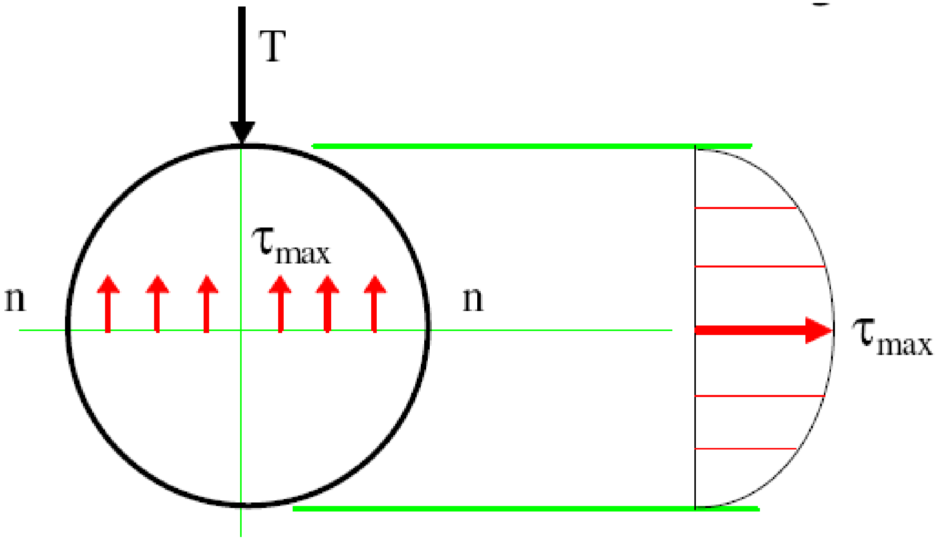
J_n = **momento d'inerzia** della sezione

b = larghezza della sezione in corrispondenza della punto di calcolo

- **CASI PARTICOLARI**



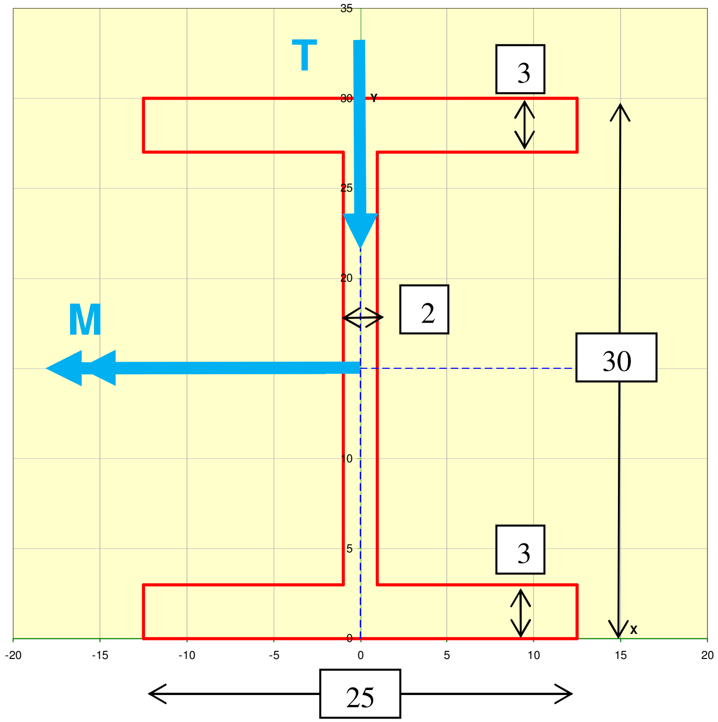
$$\begin{cases} \tau_{\max} = \dfrac{3T}{2A} \\ \tau_{media} = \dfrac{T}{A} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \tau_{\max} = \dfrac{4T}{3A} \\ \tau_{media} = \dfrac{T}{A} \end{cases}$$

ESEMPIO N°3

E’ assegnata la seguente sezione a doppio T sottoposta all’azione di un momento flettente esterno **M=400 kNm** e uno sforzo di taglio verticale **T=90 kN**. Valutare lo stato tensionale della sezione.



Calcoliamo il momento di inerzia baricentrico orizzontale della sezione come differenza tra il momento di inerzia del rettangolo 250x300 e i momenti di inerzia dei rettangoli interni 115x240.

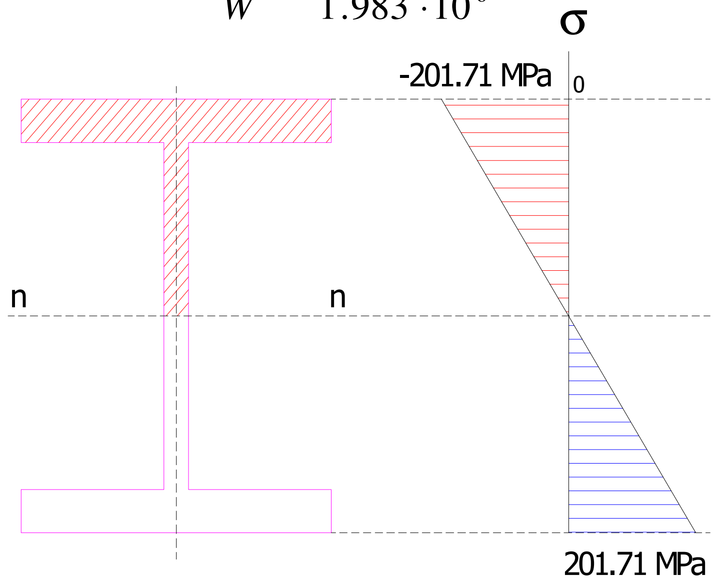
$$J_n = \frac{250 \cdot 300^3}{12} - 2\left(\frac{115 \cdot 240^3}{12}\right) = 297.5 \cdot 10^6 \ mm^4$$

Calcoliamo il modulo di resistenza a flessione della sezione:

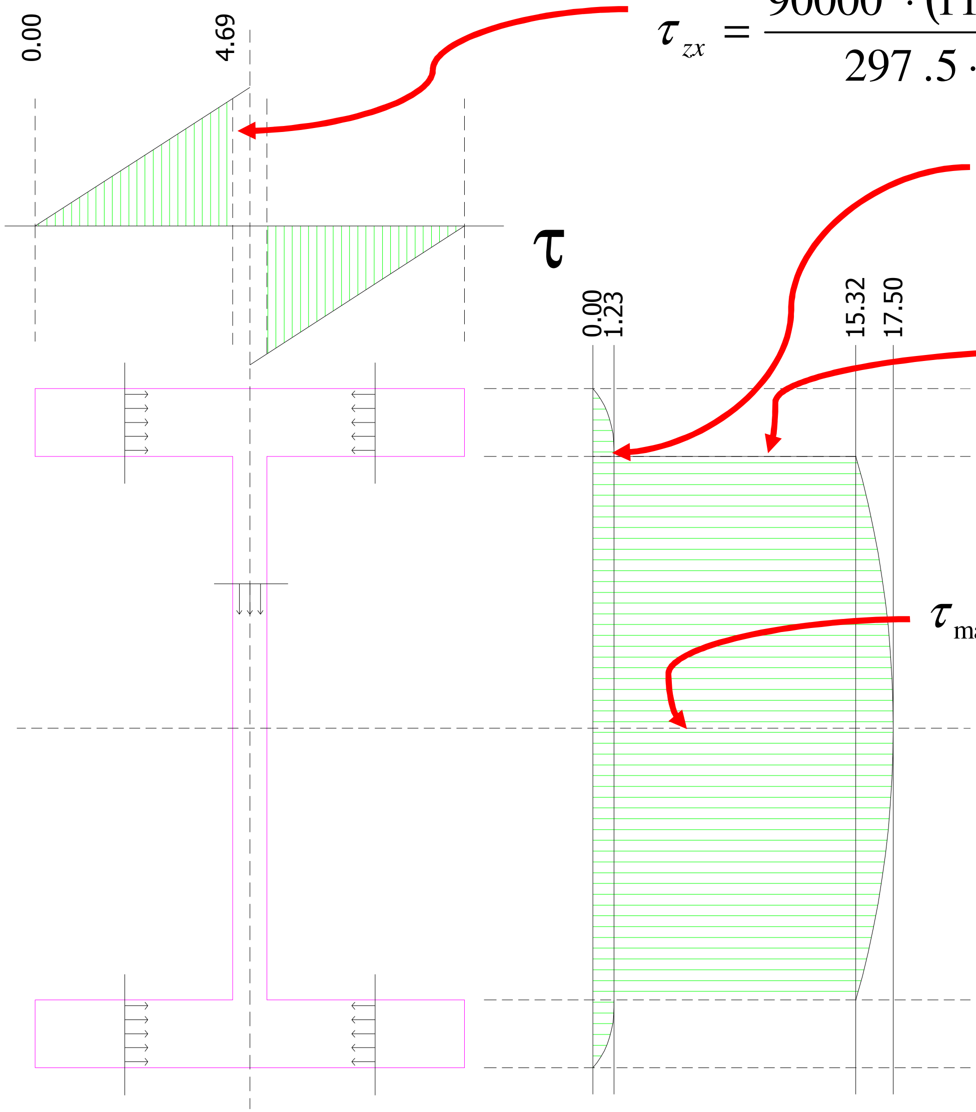
$$W = \frac{J_n}{y_{max}} = \frac{297.5 \cdot 10^6}{150} = 1.983 \cdot 10^6 \, mm^3$$

Calcoliamo la tensione massima: $\sigma = \dfrac{M}{W} = \dfrac{400 \cdot 10^6}{1.983 \cdot 10^6} = 201.71 \ MPa$

Tracciamo il diagramma delle tensioni normali:



Per il calcolo delle tensioni tangenziali con riferimento alle ali e all'anima della trave applichiamo la formula di Jourawski in corrispondenza dei vari punti di calcolo.



$$\tau_{zx} = \frac{90000 \cdot (115 \cdot 30 \cdot 135)}{297.5 \cdot 10^6 \cdot 30} = 4.69\ MPa$$

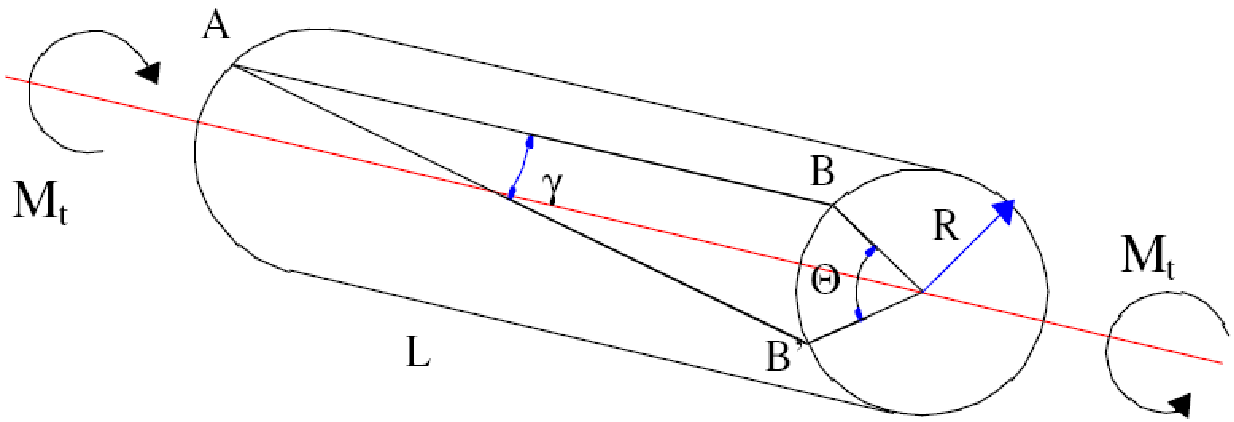
$$\tau^1_{zy} = \frac{90000 \cdot (250 \cdot 30 \cdot 135)}{297.5 \cdot 10^6 \cdot 250} = 1.23\ MPa$$

$$\tau^2_{zy} = \frac{90000 \cdot (250 \cdot 30 \cdot 135)}{297.5 \cdot 10^6 \cdot 20} = 15.32\ MPa$$

$$\tau_{max} = \frac{90000 \cdot (250 \cdot 30 \cdot 135 + 20 \cdot 120 \cdot 60)}{297.5 \cdot 10^6 \cdot 20} = 17.5\ MPa$$

TORSIONE

Un solido è soggetto a torsione quando su di esso sono applicati, alle estremità, momenti uguali e opposti attorno al suo asse longitudinale e quindi giacenti sul piano della sezione.

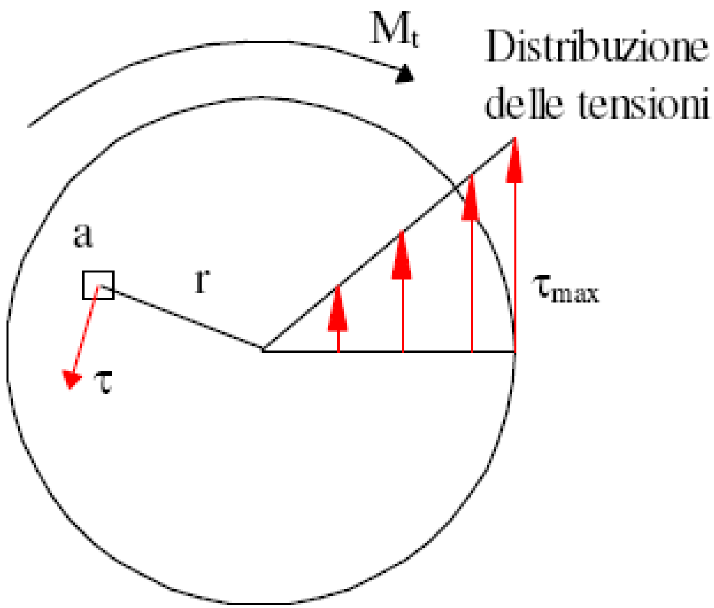


$$\left.\begin{array}{ll}\Theta & \text{angolo di torsione} \\ \gamma & \text{angolo di scorrimento}\end{array}\right\} \text{espressi in radianti}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{arco} & BB' = L \cdot \gamma \\ \text{arco} & BB' = R \cdot \Theta\end{array}\right\} \Rightarrow L \cdot \gamma = R \cdot \Theta \Rightarrow \gamma = \frac{R \cdot \Theta}{L}$$

- Le sezioni ruotano una rispetto all'altra attorno all'asse longitudinale **dell'angolo di torsione Θ** mentre ogni fibra si deforma secondo un tratto di elica.
- Dovendo opporsi a deformazioni di scorrimento, le tensioni giacciono sul piano della sezione, quindi sono delle tensioni tangenziali τ e poiché le deformazioni crescono dal centro alla periferia, le tensioni saranno massima lungo il bordo della sezione e nulle sul centro della sezione.

$$\left.\begin{aligned} \tau &= G \cdot \gamma \\ \gamma &= \frac{r \cdot \Theta}{L} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \tau = G \cdot \frac{r \cdot \Theta}{L} \qquad \sum \tau \cdot a \cdot r = M_t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{M_t \cdot r}{J_p}}$$



Fonti

- Stefano Catasta – Materiale didattico
- Nazzareno Corigliano – Materiali didattico
- Gaetano Carbonaro – Materiale didattico
- Luigi Coppola – Materiale didattico