Sussidi didattici per il corso di
COSTRUZIONI EDILI

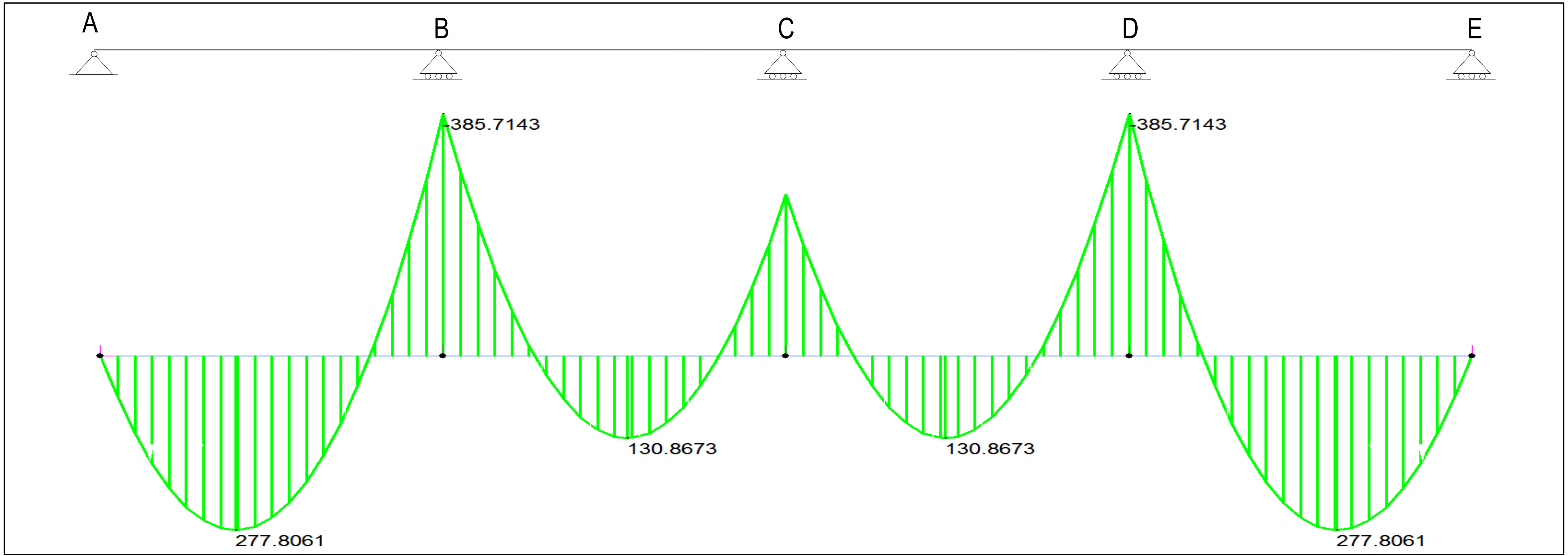
Prof. Ing. Francesco Zanghì

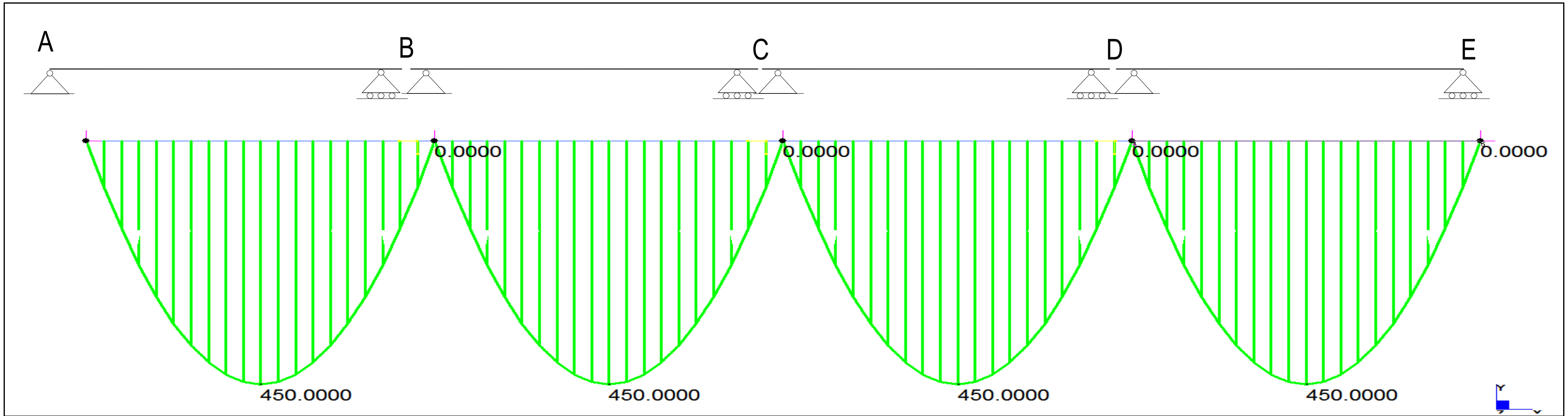
TRAVI CONTINUE

AGGIORNAMENTO DEL 27/10/2011

Per **trave continua** intendiamo una trave unica, vincolata su più appoggi di cui almeno uno deve essere fisso a terra (cerniera), mentre glia altri possono essere muniti di carrello.

A causa della continuità della trave, sulle campate si verifica una forte riduzione dei momenti flettenti rispetto alla soluzione con campate separate isostatiche. La riduzione dei momenti massimi positivi si "paga", tuttavia, con la comparsa di momenti negativi (che tendono le fibre superiori) in corrispondenza degli appoggi intermedi.

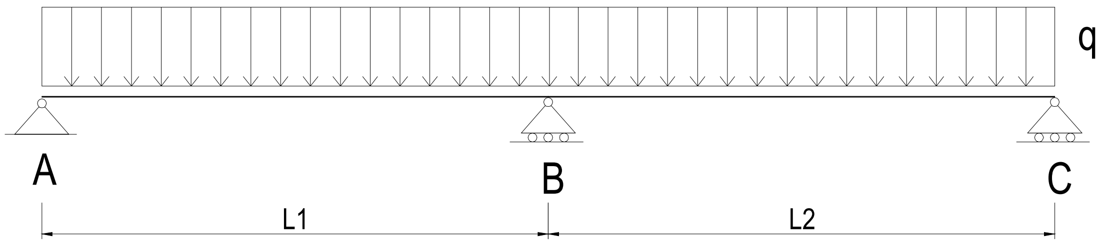

A
B
C
D
E
385.7143
385.7143
130.8673
130.8673
277.8061
277.8061


A
B
C
D
E
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
450.0000
450.0000
450.0000
450.0000

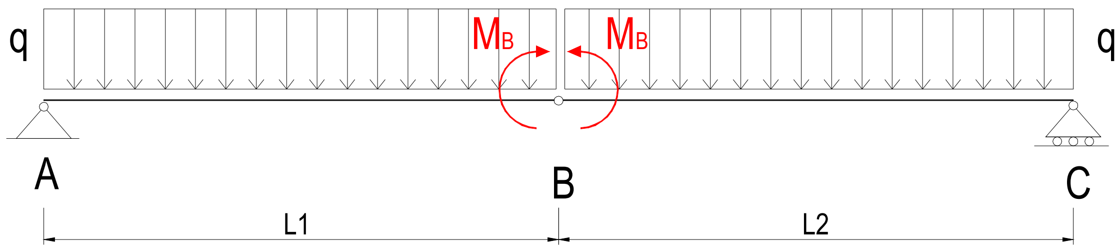
La trave continua è **iperstatica** in quanto il numero di incognite è superiore a quello delle equazioni di equilibrio. Ciò significa che esistono infinite soluzioni che soddisfano il sistema. La soluzione esatta, però, è solo quella **congruente** con le caratteristiche di deformabilità degli elementi che compongono la struttura e con i suoi vincoli.

EQUAZIONE DEI TRE MOMENTI DI CLAPEYRON

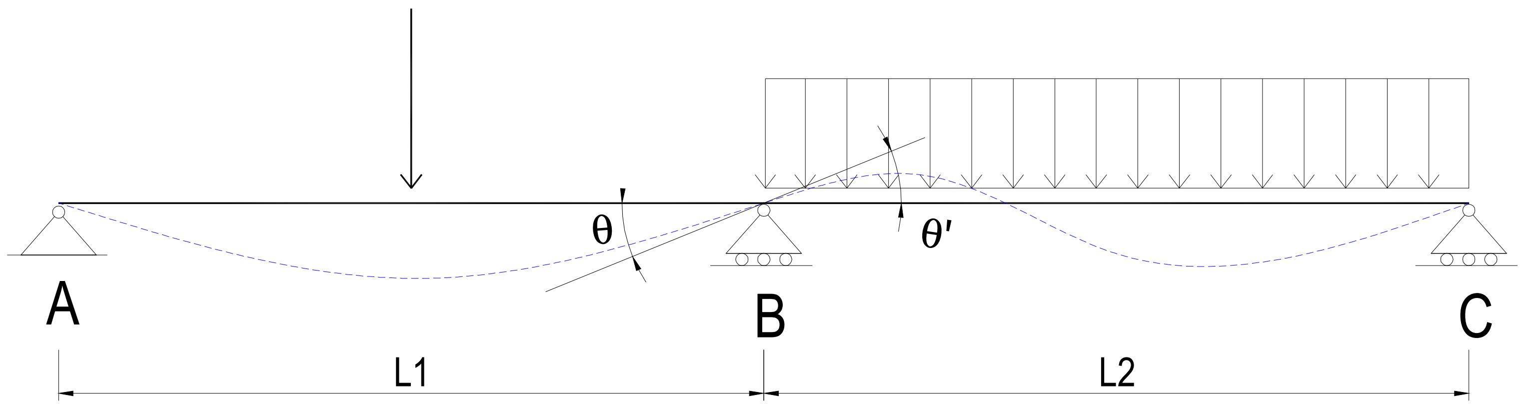
Consideriamo una trave continua su tre appoggi caricata con un carico ripartito q.

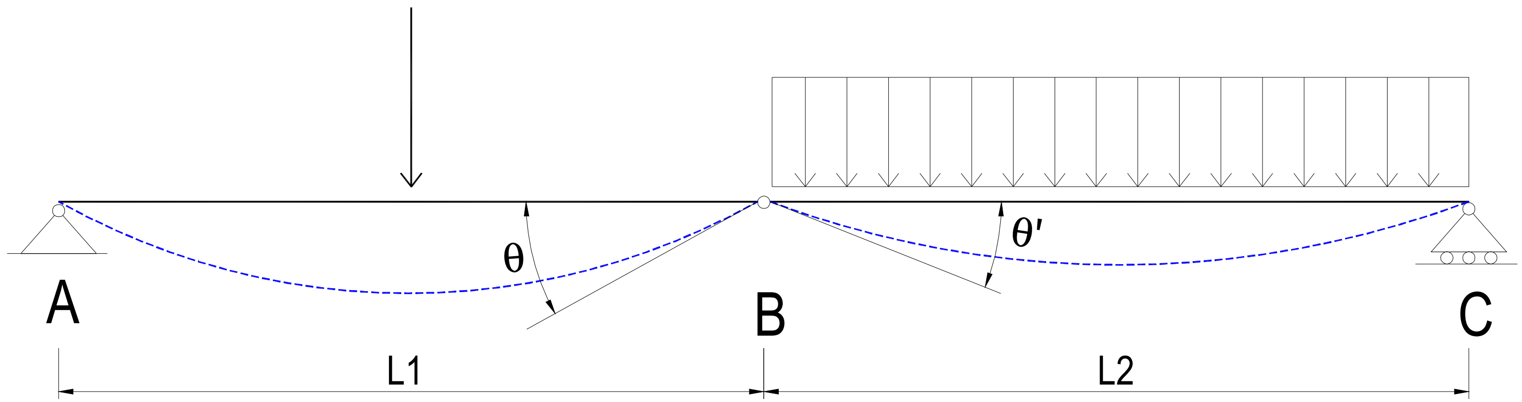


Immaginiamo di sconnettere la trave in corrispondenza del punto B ed introdurre una cerniera. Per ripristinare la continuità e rendere i due schemi equivalenti dobbiamo applicare i momenti M_B che sono incogniti.



La cerniera permetterebbe ai due tronchi di ruotare liberamente l'uno rispetto all'altro mentre nel sistema reale i due tronchi sono legati dal vincolo di continuità.

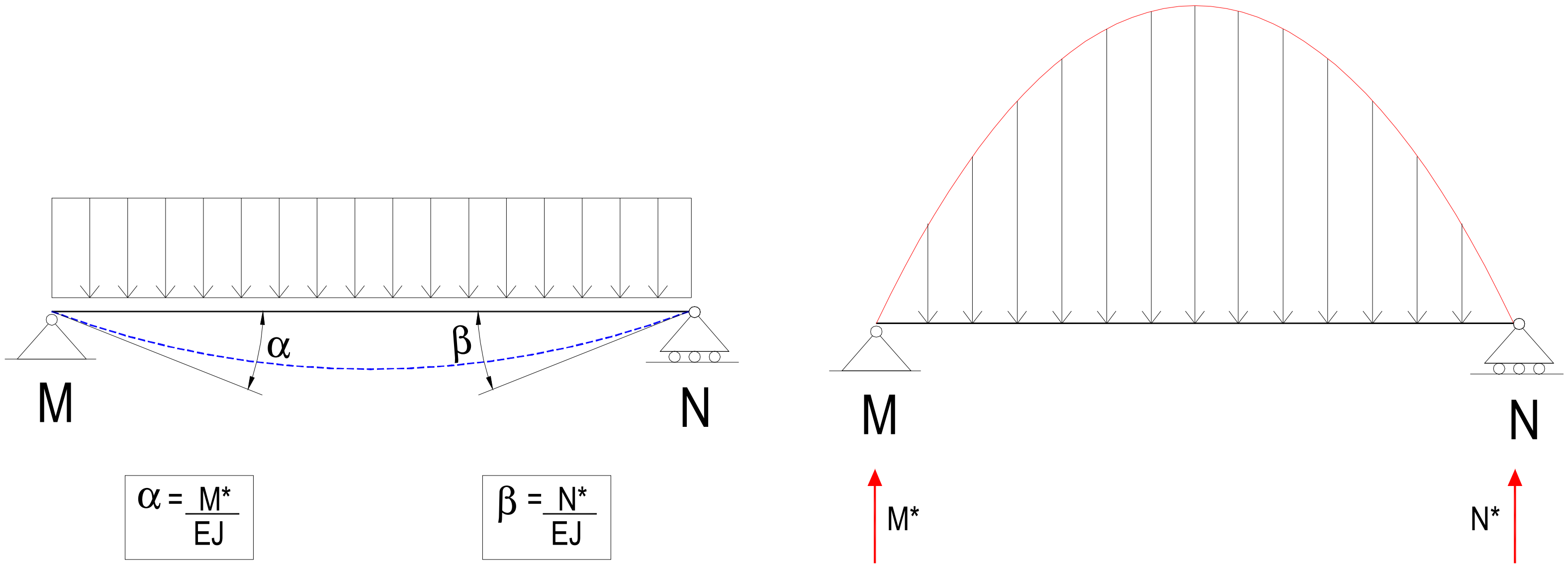




Pertanto la congruenza implica:

$$\boxed{\theta = -\theta'}$$

Per il **1° teorema di Mohr** gli angoli di rotazione delle tangenti d'estremità della linea elastica di una trave appoggiata-appoggiata sono dati dal rapporto tra le reazioni ausiliarie ottenute caricando la trave con il diagramma dei momenti della trave reale e la quantità EJ.



Alla rotazione dovuta ai carichi esterni deve essere sommata la rotazione dovuta ai momenti di estremità pertanto, con riferimento alla trave continua A-B-C, si ha:

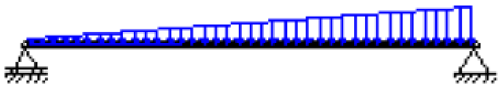
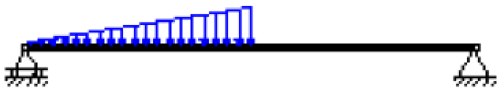
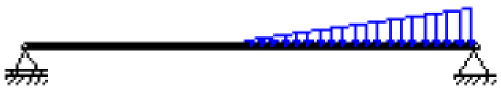
$$\theta = \frac{B^*{}_{\sin}}{EJ} + \frac{L_1}{6EJ}\left(M_A + 2M_B\right) \qquad \theta' = \frac{B^*{}_{des}}{EJ} + \frac{L_2}{6EJ}\left(2M_B + M_C\right)$$

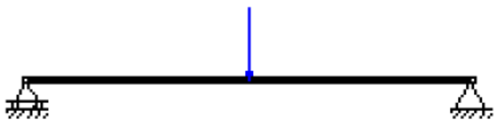
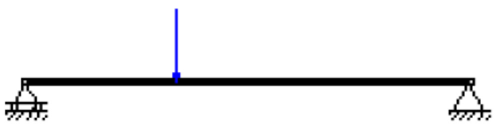
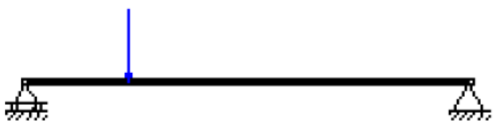
Sostituendo nell'equazione di congruenza e semplificando:

$$\boxed{M_A \cdot L_1 + 2M_B\left(L_1 + L_2\right) + M_C \cdot L_4 = -6\left(B^*{}_{\sin} + B^*{}_{des}\right)}$$

Questa equazione è nota come **equazione dei tre momenti di Clapeyron.** Le reazioni fittizie dipendono da come è caricata la struttura.

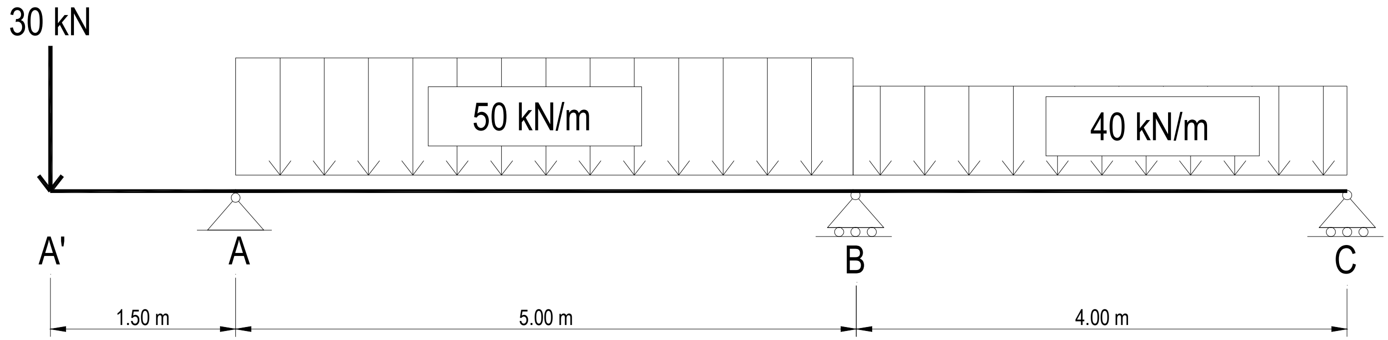
schema statico	a	b	φ_A	φ_B
	$a=0$	$b=l$	$\varphi_A=\dfrac{ql^3}{24EJ}$	$\varphi_B=-\dfrac{ql^3}{24EJ}$
	$a=0$	$b=\dfrac{2}{3}l$	$\varphi_A=\dfrac{8ql^3}{243EJ}$	$\varphi_B=-\dfrac{7ql^3}{243EJ}$
	$a=0$	$b=\dfrac{1}{2}l$	$\varphi_A=\dfrac{9ql^3}{384EJ}$	$\varphi_B=-\dfrac{7ql^3}{384EJ}$
	$a=0$	$b=\dfrac{1}{3}l$	$\varphi_A=\dfrac{25ql^3}{1944EJ}$	$\varphi_B=-\dfrac{17ql^3}{1944EJ}$
	$a=\dfrac{1}{4}l$	$b=\dfrac{3}{4}l$	$\varphi_A=\dfrac{11ql^3}{384EJ}$	$\varphi_B=-\dfrac{11ql^3}{384EJ}$

schema statico	a	b	φ_A	φ_B
	$a=0$	$b=l$	$\varphi_A=\dfrac{7q_0\,l^3}{360\,EJ}$	$\varphi_B=-\dfrac{8\,q_0\,l^3}{360\,EJ}$
	$a=0$	$b=\dfrac{1}{2}l$	$\varphi_A=\dfrac{41\,q_0\,l^3}{2880\,EJ}$	$\varphi_B=-\dfrac{34\,q_0\,l^3}{2880\,EJ}$
	$a=\dfrac{1}{2}l$	$b=l$	$\varphi_A=\dfrac{37\,q\,l^3}{5760\,EJ}$	$\varphi_B=-\dfrac{53\,q\,l^3}{5760\,EJ}$

schema statico	a	b	φ_A	φ_B
	$a=\dfrac{1}{2}l$	$b=\dfrac{1}{2}l$	$\varphi_A=\dfrac{P\,l^2}{16\,EJ}$	$\varphi_B=-\dfrac{P\,l^2}{16\,EJ}$
	$a=\dfrac{1}{3}l$	$b=\dfrac{2}{3}l$	$\varphi_A=\dfrac{5\,P\,l^2}{81\,EJ}$	$\varphi_B=-\dfrac{4\,P\,l^2}{81\,EJ}$
	$a=\dfrac{1}{4}l$	$b=\dfrac{3}{4}l$	$\varphi_A=\dfrac{7\,P\,l^2}{128\,EJ}$	$\varphi_B=-\dfrac{5\,P\,l^2}{128\,EJ}$

ESEMPIO 1

Studiare la trave continua omogenea, a sezione costante, riportata in figura e tracciare i diagrammi di taglio e momento flettente.



- **CALCOLO DEI MOMENTI AGLI APPOGGI**

Il momenti agli appoggi A e C sono noti:

$$\boxed{M_A = -30 \cdot 1.50 = -45\ kNm}; \qquad \boxed{M_C = 0}$$

Il momento all'appoggio B si calcola mediante l'equazione dei tre momenti:

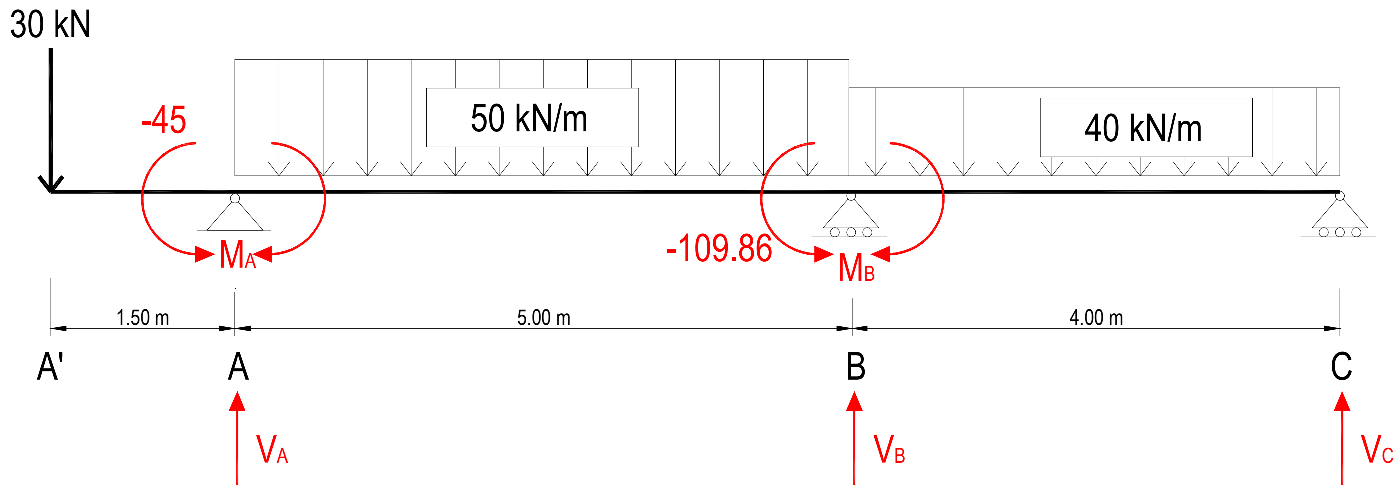
$$M_A \cdot 5.00 + 2M_B(5.00 + 4.00) + M_C \cdot 4.00 = -6\left(B^*_{\sin} + B^*_{des}\right)$$

$$-45 \cdot 5.00 + 2M_B \cdot 9.00 + 0 \cdot 4.00 = -6\left(B^*_{\sin} + B^*_{des}\right); \; -225 + 18M_B = -6\left(B^*_{\sin} + B^*_{des}\right)$$

$$B^*_{\sin} = \frac{q \cdot l^3}{24} = \frac{50 \cdot 5^3}{24} = 260.42\,\frac{kN}{m^2} \; ; \; B^*_{des} = \frac{40 \cdot 4^3}{24} = 106.67\,\frac{kN}{m^2}$$ (vedi tabelle di pag.7)

Pertanto: $-225 + 18M_B = -2202.54$ da cui si ricava: $\boxed{M_B = -109.86\ kNm}$

- **CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI**



$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B + V_C - 30 - 50 \cdot 5.00 - 40 \cdot 4.00 = 0 \\ V_A \cdot 5.00 - 30 \cdot (1.50 + 5.00) - 50 \cdot 5.00 \cdot 2.50 = M_B \\ V_C \cdot 4.00 - 40 \cdot 4.00 \cdot 2.00 = M_B \end{cases}$$

- Equilibrio alla traslazione orizzontale
- Equilibrio alla traslazione verticale
- Equilibrio alla rotazione a sinistra di B
- Equilibrio alla rotazione a destra di B

Dalla terza equazione si ricava:

$V_A \cdot 5.00 - 195 - 625 = -109.86$; $V_A \cdot 5.00 = 710.14$; $\boxed{V_A = 142.03\, kN}$

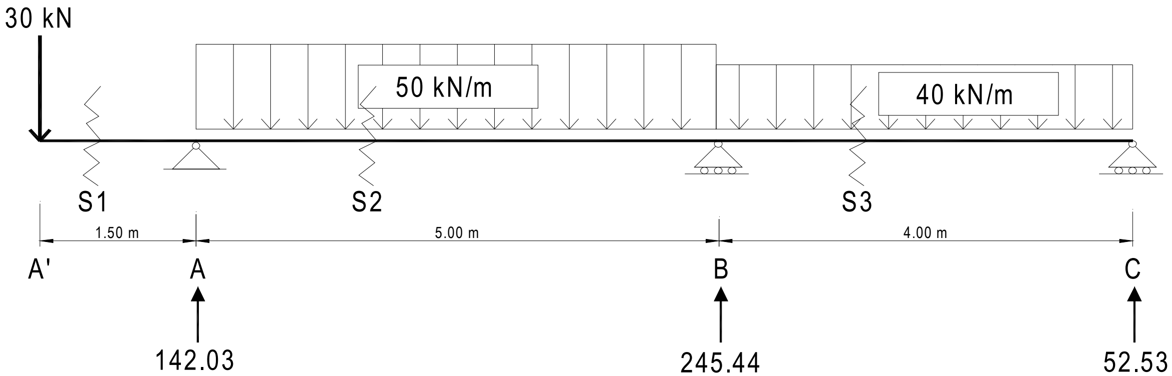
Dalla quarta equazione si ricava:

$V_C \cdot 4.00 = 210.14$; $\boxed{V_C = 52.53\, kN}$

Sostituendo V_A e V_C nella seconda equazione:

$$142.03 + V_B + 52.53 - 30 - 250 - 160 = 0\,;\quad \boxed{V_B = 245.44\ kN}$$

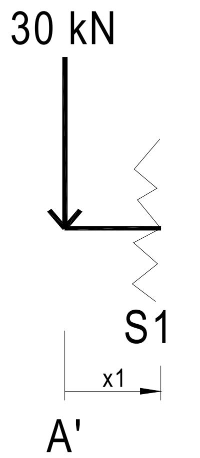
- **CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE**



➢ **tratto A'A:** Guardiamo a sinistra della sezione S1:

TAGLIO

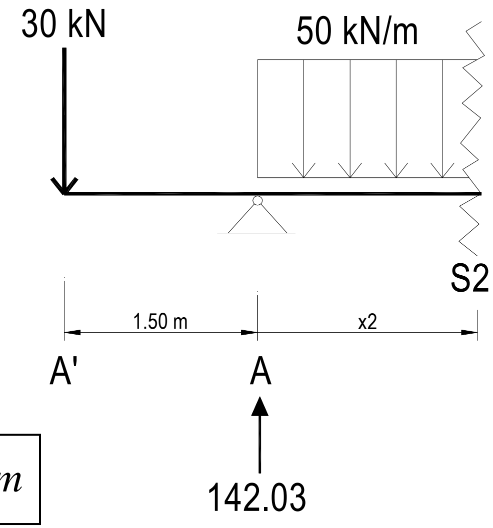
$$T_{S1}^{-} = -30\ kN \quad \begin{cases} per\ x_1 = 0 \Rightarrow T^{-}_{A'} = -30\ kN \\ per\ x_1 = 1.50 \Rightarrow T^{-}_{A} = -30\ kN \end{cases}$$



MOMENTO

$$M_{S1}^{-} = -30\ x_1 \quad \begin{cases} per\ x_1 = 0 \Rightarrow M^{-}_{A'} = 0 \\ per\ x_1 = 1.50 \Rightarrow M^{-}_{A} = -45\ kNm \end{cases}$$ lineare

- **tratto AB** : Guardiamo a sinistra della sezione S2:



<u>TAGLIO</u>

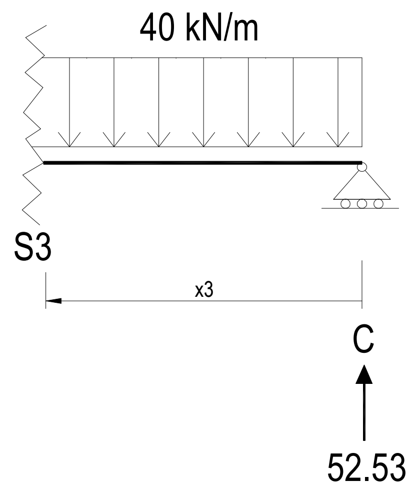
$$T_{S2}^{-} = 142.03 - 30 - 50 \cdot x_2 \quad \begin{cases} per\ x_2 = 0 \Rightarrow T^{+}{}_{A} = 112.03\ kN \\ per\ x_2 = 5.00 \Rightarrow T^{-}{}_{B} = -137.97\ kN \end{cases}$$

Punto di nullo: $142.03 - 30 - 50 \cdot x_2 = 0$; $\overline{x_2} = 2.24\ m$ dal punto A

<u>MOMENTO IN CAMPATA</u>

$$M_{S2}^{-} = 142.03 \cdot x_2 - 50\frac{x_2^{\,2}}{2} - 30(1.50 + x_2) \quad ; \ per\ x_2 = 2.24 \Rightarrow \boxed{M^{AB}{}_{\max} = 80.50\ kNm}$$

- **tratto BC** : Guardiamo a destra della sezione S3:



<u>TAGLIO</u>

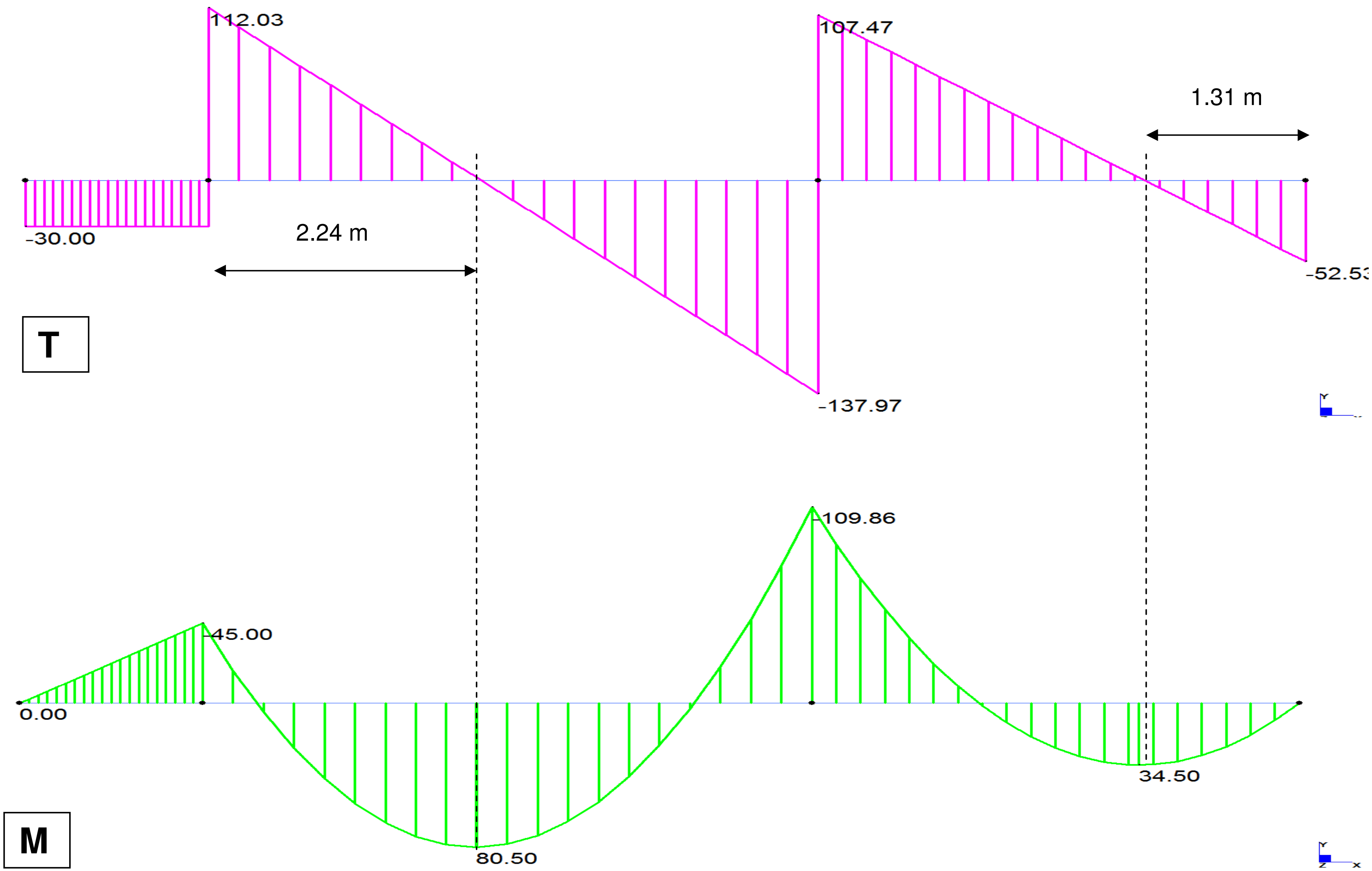
$$T_{S3}^{+} = -52.53 + 40 \cdot x_3 \quad \begin{cases} per\ x_3 = 0 \Rightarrow T^{-}{}_{C} = -52.53\ kN \\ per\ x_3 = 4.00 \Rightarrow T^{+}{}_{B} = 107.47\ kN \end{cases}$$

Punto di nullo: $-52.53 + 40 \cdot x_3 = 0$; $\overline{x_3} = 1.31\ m$ dal punto C

<u>MOMENTO IN CAMPATA</u>

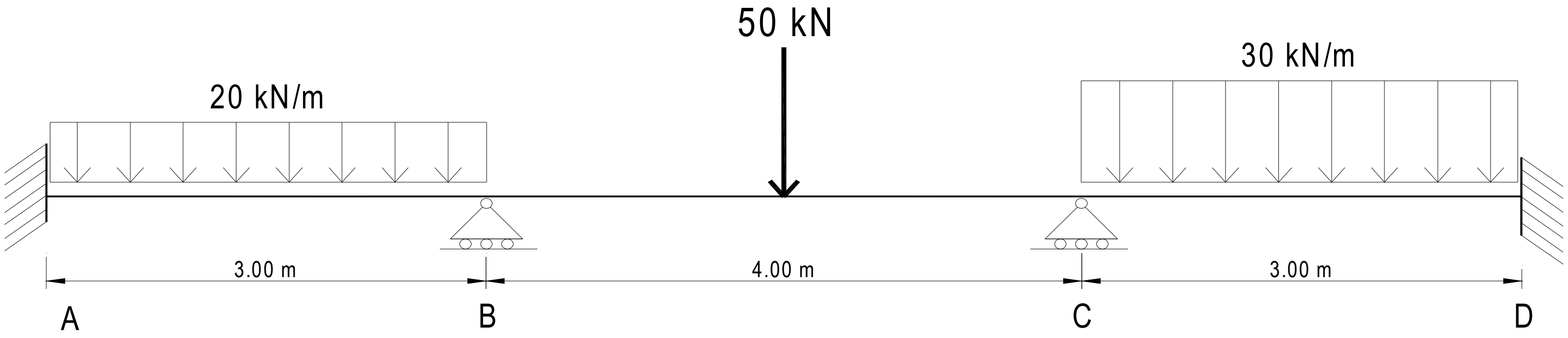
$$M_{S3}^{+} = 52.53 \cdot x_3 - 40\frac{x_3^{\,2}}{2} \quad ; \ per\ x_3 = 1.31 \Rightarrow \boxed{M^{BC}{}_{\max} = 34.50\ kNm}$$

- **DIAGRAMMI**

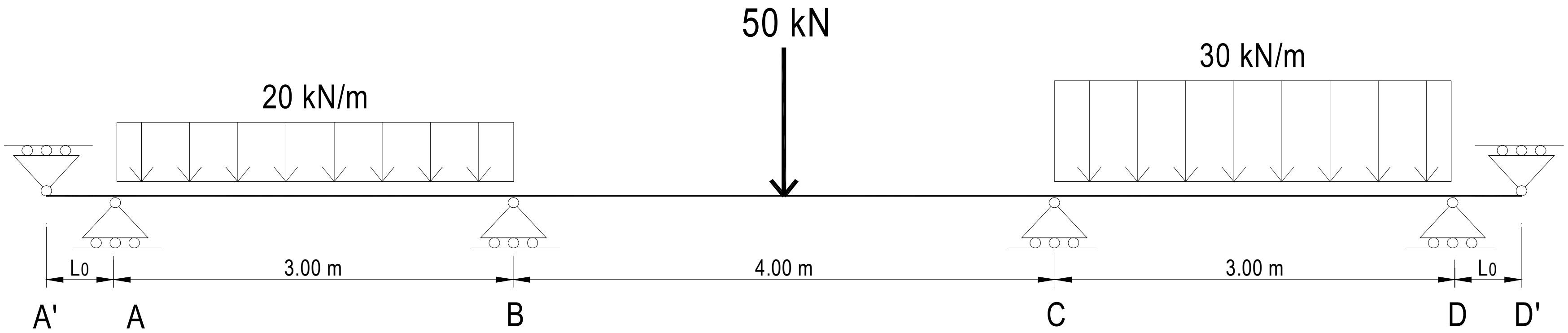

112.03
107.47
1.31 m
-30.00
2.24 m
-52.53
T
-137.97
109.86
45.00
0.00
34.50
M
80.50

ESEMPIO 2

Studiare la trave continua omogenea, a sezione costante, riportata in figura e tracciare i diagrammi di taglio e momento flettente.



Trattandosi di trave continua incastrata agli estremi, sostituiamo gli incastri di estremità con due appoggi, posti a distanza piccolissima, L_0, le cui reazioni costituiscono una coppia. La nuova campata che si viene a formare viene considerata scarica :



- **CALCOLO DEI MOMENTI AGLI APPOGGI**

Scriviamo 4 volte l'equazione dei tre momenti:

$$\begin{cases} M_{A'} \cdot L_0 + 2M_A\left(L_0 + 3.00\right) + M_B \cdot 3.00 = -6\left(A^*_{\sin} + A^*_{des}\right) \\ M_A \cdot 3.00 + 2M_B\left(3.00 + 4.00\right) + M_C \cdot 4.00 = -6\left(B^*_{\sin} + B^*_{des}\right) \\ M_B \cdot 4.00 + 2M_C\left(4.00 + 3.00\right) + M_D \cdot 3.00 = -6\left(C^*_{\sin} + C^*_{des}\right) \\ M_C \cdot 3.00 + 2M_D\left(3.00 + L_0\right) + M_{D'} \cdot L_0 = -6\left(D^*_{\sin} + D^*_{des}\right) \end{cases}$$

- TRATTO **A'-A-B**
- TRATTO **A-B-C**
- TRATTO **B-C-D**
- TRATTO **C-D-D'**

poiché si può porre L_0=0 segue : $A^*_{\sin} = 0$ e $D^*_{des} = 0$, pertanto:

$$\begin{cases} 2M_A \cdot 3.00 + M_B \cdot 3.00 = -6 \cdot A^*_{des} \\ M_A \cdot 3.00 + 2M_B\left(3.00 + 4.00\right) + M_C \cdot 4.00 = -6\left(B^*_{\sin} + B^*_{des}\right) \\ M_B \cdot 4.00 + 2M_C\left(4.00 + 3.00\right) + M_D \cdot 3.00 = -6\left(C^*_{\sin} + C^*_{des}\right) \\ M_C \cdot 3.00 + 2M_D \cdot 3.00 = -6 \cdot D^*_{\sin} \end{cases}$$

Dalle tabelle di pag.7 e 8 si ricavano:

$A^*_{des} = B^*_{\sin} = \dfrac{q \cdot l^3}{24} = \dfrac{20 \cdot 3^3}{24} = 22.5\,\dfrac{kN}{m^2}$; $B^*_{des} = C^*_{\sin} = \dfrac{P \cdot l^2}{16} = \dfrac{50 \cdot 4^2}{16} = 50\,\dfrac{kN}{m^2}$;

$C^*_{des} = D^*_{\sin} = \dfrac{q \cdot l^3}{24} = \dfrac{30 \cdot 3^3}{24} = 33.75\,\dfrac{kN}{m^2}$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} 6M_A + 3M_B = -135 \\ 3M_A + 14M_B + 4M_C = -435 \\ 4M_B + 14M_C + 3M_D = -502.5 \\ 3M_C + 6M_D = -202.5 \end{cases}$$

Dalla prima: $3M_A = -1.5M_B - 67.5$; dalla quarta: $3M_D = -1.5M_C - 101.25$

Sostituendo nella seconda e terza equazione:

$$\begin{cases} -1.5M_B - 67.5 + 14M_B + 4M_C = -435 \\ 4M_B + 14M_C - 1.5M_C - 101.25 = -502.5 \end{cases} ; \begin{cases} 12.5M_B + 4M_C = -367.5 \\ 4M_B + 12.5M_C = -401.25 \end{cases}$$

Dalla prima: $M_C = -91.87 - 3.125M_B$; sostituendo nella seconda: $4M_B - 39M_B - 1148.37 = -401.25$

$$\boxed{M_B = -21.3\,kNm}$$

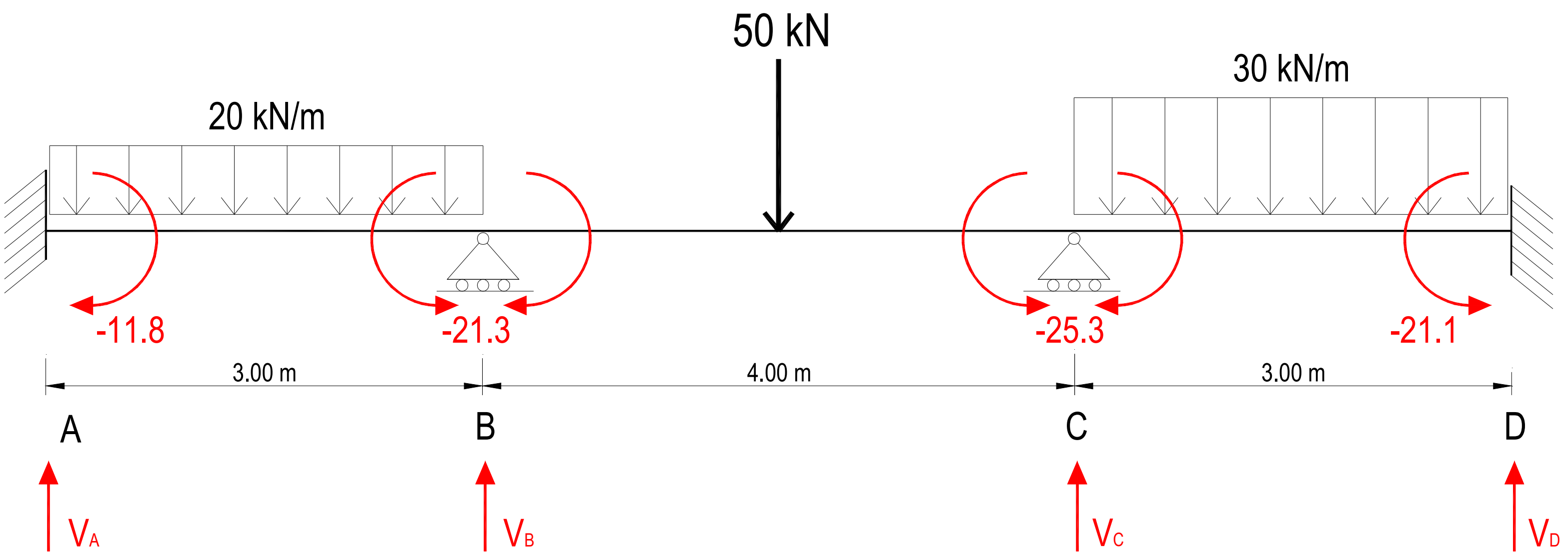
Sostituendo:

$$\boxed{M_C = -25.3\,kNm}$$

$$\boxed{M_A = -11.8\,kNm}$$

$$\boxed{M_D = -21.1\,kNm}$$

- **CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI**



$$\begin{cases} V_A + V_B + V_C + V_D - 50 - 20 \cdot 3.00 - 30 \cdot 3.00 = 0 \\ V_A \cdot 3.00 - (20 \cdot 3.00 \cdot 1.5) + M_A = M_B \\ V_D \cdot 3.00 - (30 \cdot 3.00 \cdot 1.5) + M_D = M_C \\ V_D \cdot (4.00 + 3.00) + V_C \cdot 4 - (30 \cdot 3.00 \cdot 5.5) - 50 \cdot 2.00 + M_D = M_B \end{cases}$$

- Equilibrio alla traslazione verticale
- Equilibrio alla rotazione a sinistra di B
- Equilibrio alla rotazione a destra di C
- Equilibrio alla rotazione a destra di B

Dalla seconda equazione si ricava:

$V_A \cdot 3.00 - 90 - 11.8 = -21.3$; $\boxed{V_A = 26.8\ kN}$

Dalla terza equazione si ricava:

$V_D \cdot 3.00 - 135 - 21.1 = -25.3$; $\boxed{V_D = 43.6\ kN}$

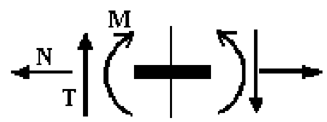
Sostituendo V_D nella quarta equazione:

$$43.60 \cdot (4.00 + 3.00) + V_C \cdot 4 - (30 \cdot 3.00 \cdot 5.5) - 50 \cdot 2.00 - 21.1 = -21.3\,; \quad \boxed{V_C = 72.4\ kN}$$

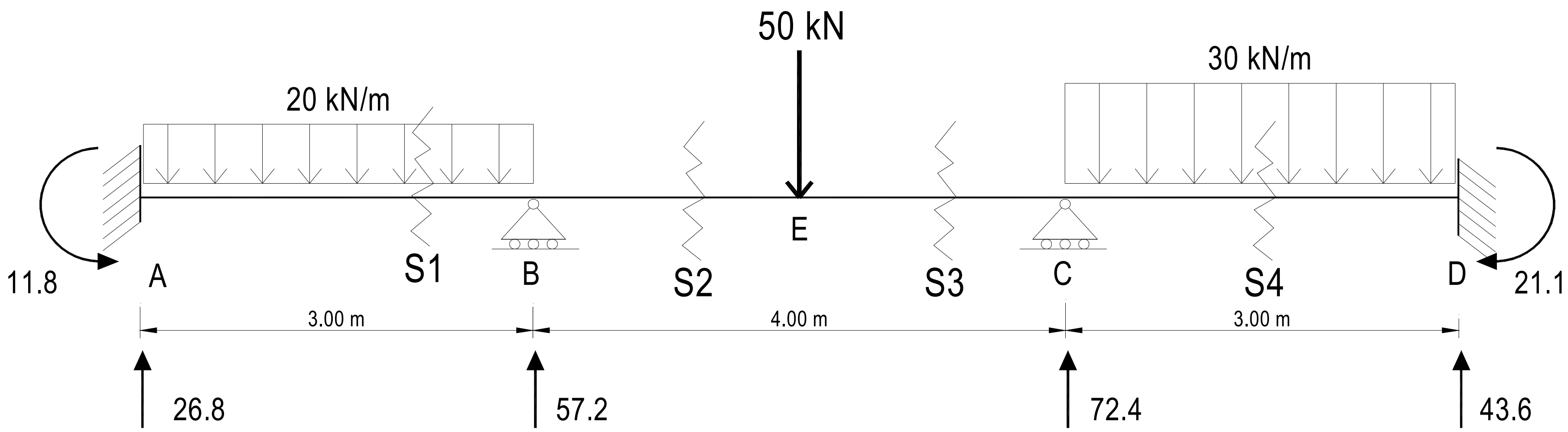
Sostituendo le reazioni trovate nella prima equazione:

$$26.80 + V_B + 72.4 + 43.60 - 50 - 60 - 90 = 0\,; \quad \boxed{V_B = 57.2\ kN}$$

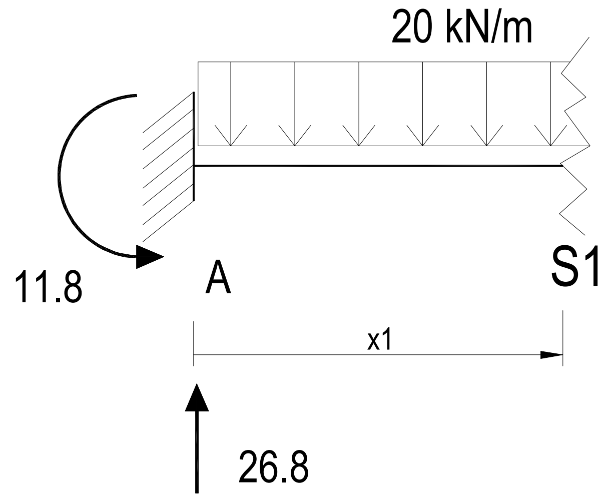
- **<u>CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE</u>**



Convenzione dei segni



- **tratto AB** : Guardiamo a sinistra della sezione S1:



TAGLIO

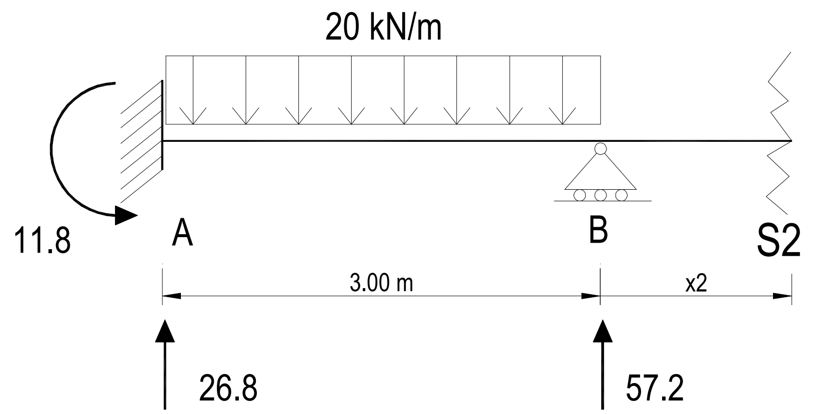
$$T_{S1}^{-} = 26.8 - 20 \cdot x_1 \qquad \begin{cases} per\ x_1 = 0 \Rightarrow T^{+}{}_{A} = 26.80\ kN \\ per\ x_1 = 3.00 \Rightarrow T^{-}{}_{B} = -33.20\ kN \end{cases}$$

Punto di nullo: $26.8 - 20 \cdot x_1 = 0$; $\overline{x_1} = 1.34\ m$ dal punto A

MOMENTO IN CAMPATA

$$M_{S1}^{-} = 26.8 \cdot x_1 - 20\frac{x_2^{\ 2}}{2} - 11.8 \quad ;\ per\ x_1 = 1.34 \Rightarrow \boxed{M^{AB}{}_{\max} = 6.2\ kNm}$$

- **tratto BP** : Guardiamo a sinistra della sezione S2:



TAGLIO

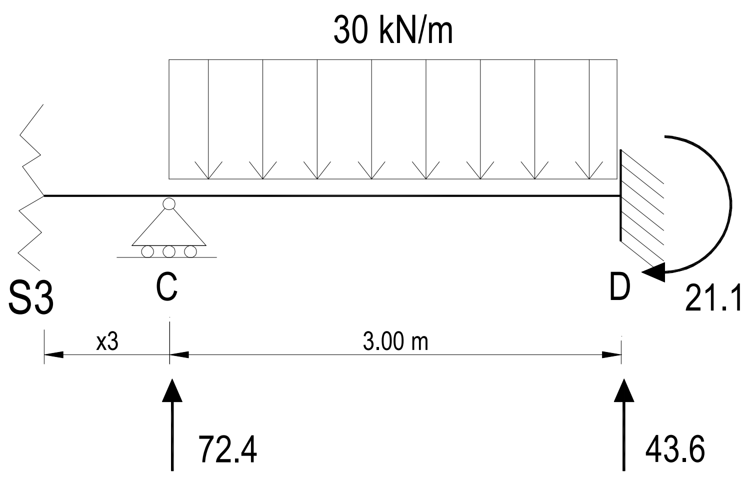
$$T_{S2}^{-} = 26.8 + 57.2 - 20 \cdot 3.00 = 24\ kN$$ costante

MOMENTO

$$M_{S2}^{-} = 26.8 \cdot (3 + x_2) + 57.2 \cdot x_2 - 20 \cdot 3.00 \cdot (1.5 + x_2) - 11.8$$

$$per\ x_2 = 2 \Rightarrow \boxed{M^{-}{}_{E} = 26.7\ kNm}$$

- **tratto PC**: Guardiamo a sinistra della sezione S3:



TAGLIO

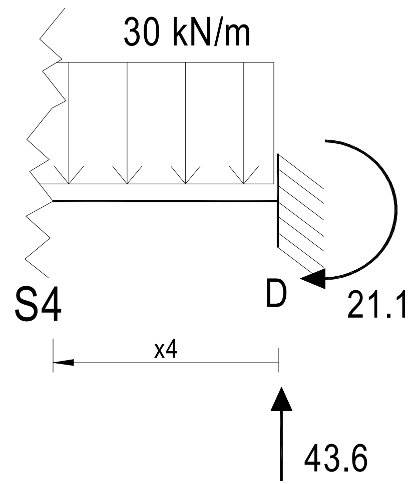
$$T_{S3}^{\ +} = -43.6 - 72.4 + 30 \cdot 3.00 = -26\ kN$$ costante

MOMENTO

$$M_{S3}^{\ +} = 43.6 \cdot (3 + x_3) + 72.4 \cdot x_3 - 30 \cdot 3.00 \cdot (1.5 + x_3) - 21.1$$

$$per\ x_3 = 2 \Rightarrow \boxed{M^+{}_E = 26.7\ kNm}$$

- **tratto CD**: Guardiamo a destra della sezione S4:



TAGLIO

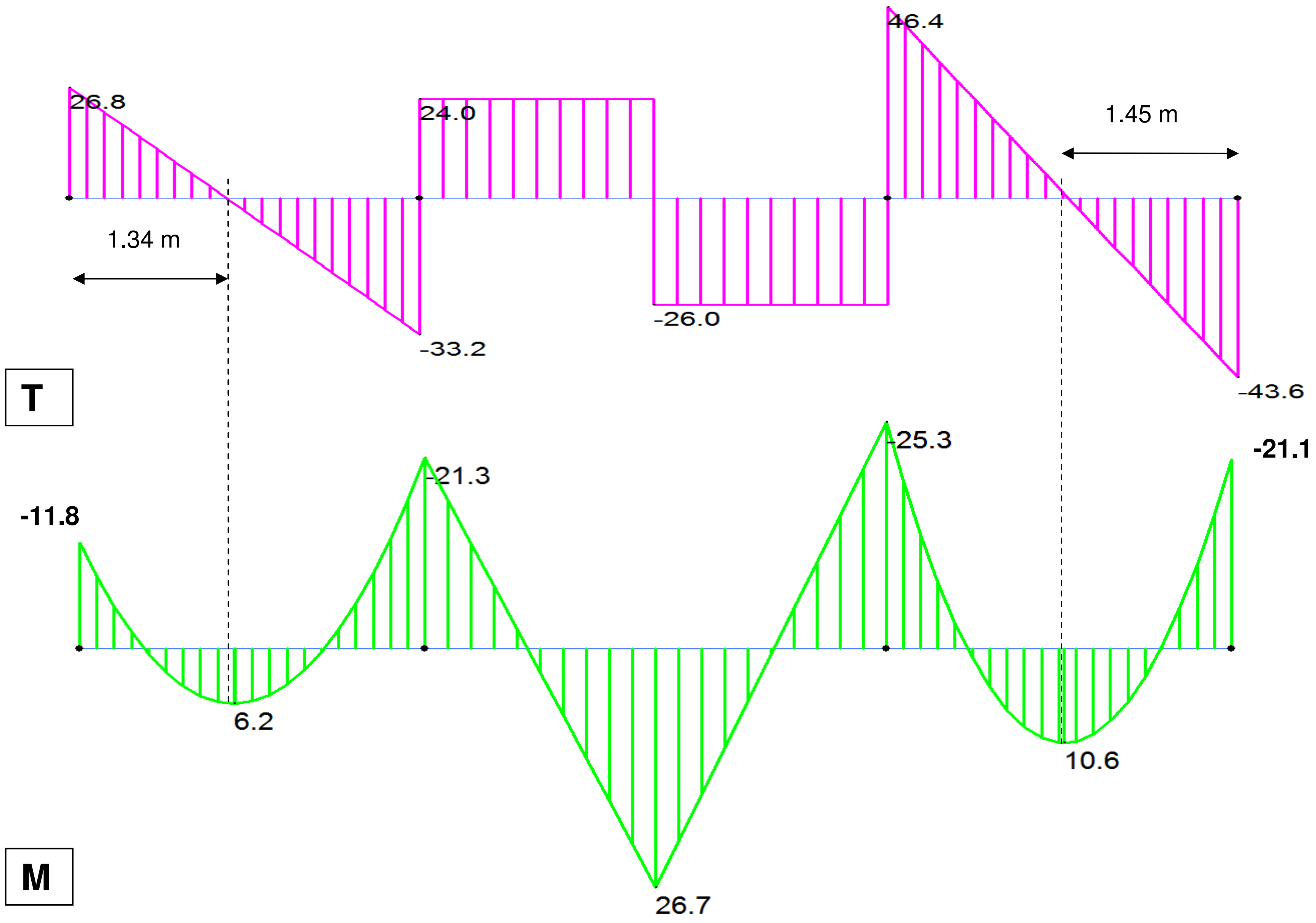
$$T_{S4}^{\ +} = -43.6 + 30 \cdot x_4 \quad \begin{cases} per\ x_4 = 0 \Rightarrow T^-{}_D = -43.6\ kN \\ per\ x_4 = 3.00 \Rightarrow T^+{}_C = 46.4\ kN \end{cases}$$

Punto di nullo: $-43.6 + 30 \cdot x_4 = 0$; $\overline{x_4} = 1.45\ m$ dal punto D

MOMENTO IN CAMPATA

$$M_{S4}^{\ +} = 43.6 \cdot x_4 - 30 \frac{x_4^{\ 2}}{2} - 21.1 \ ;\ per\ x_4 = 1.45 \Rightarrow \boxed{M^{CD}{}_{\max} = 10.6\ kNm}$$

- **DIAGRAMMI**



Fonti

- Ernesto Lo Re – Materiale didattico
- M.G.Busato – Rotazioni degli estremi di una trave appoggiata